

Faghæfte 12

Matematik

Ma
Klarer
Må!

Uddannelsesstyrelsens håndbogsserie nr. 4 - 2001
Grundskolen

**Denne bearbejdelse af Klare Mål er lavet
på begrund af word dokumenter fra
undervisningsministeriet, og indeholder
den samme tekst som de trykte udgaver.**

**Den eneste undtagelse er billeder, som ikke kunne
bruges på grund af ophavsret.**

Forord

Regeringen ønsker at styrke det faglige niveau i folkeskolen samtidig med, at undervisningen bliver differentieret og dermed målrettet den enkelte elev. En styrket faglighed i undervisningen går hånd i hånd med udviklingen af elevernes alsidige personlige kompetencer. Valget står ikke mellem, på den ene side, en faglig stærk skole - hvor eleverne ikke bryder sig om at være - eller på den anden side, en skole, hvor eleverne trives godt, fordi der ikke stilles krav.

De nye fagbeskrivelser indeholder mere præcise centrale kundskabs- og færdighedsområder (CKF) samt vejledende delmål og udgør rygraden i initiativet Klare Mål, som understøtter regeringens politik om øget åbenhed og gennemsigtighed i uddannelsessektoren.

Hensigten er, at de nye centrale kundskabs- og færdighedsområder og de tilhørende delmål skal give lærerne et mere klart og tydeligt billede af, hvad børnene skal lære, uden at der tages stilling til hvordan. Der er tale om en hjælpende hånd til den enkelte lærer i tilrettelæggelsen af undervisningen. Samtidig vil de nye CKF'er og delmål kunne forenkle den løbende evaluering af undervisningen. Det er ligeledes hensigten, at de nye CKF'er og delmål skal give både lærere og forældre mulighed for langt tidligere i skoleforløbet at tage hånd om de elever, der lærer i et andet tempo end gennemsnittet.

Endelig forestiller jeg mig, at Klare Mål i fremtiden bliver et centralt element i undervisningen på lærerseminarierne, så de studerende allerede tidligt i deres uddannelsesforløb får et klart kendskab til og overblik over, hvad målene med undervisningen er i skolen.

Jeg betragter Klare Mål som et dialogredskab, der giver lærere, elever og forældre mulighed for sammen at vurdere undervisning og dermed få rettet op, hvis skolen, og dermed eleverne, har vanskeligt ved at leve op til kravene.

Klare Mål handler også om trivsel og elevernes alsidige personlige udvikling. Derfor vil Undervisningsministeriet i sammenhæng med Klare Mål for fagene udsende et vejledningsmateriale, som kommuner og skoler kan bruge, når de beskriver, hvordan skolen arbejder med elevernes alsidige personlige udvikling.

Det er et led i regeringens politik, at skolen skal åbne sig mod omverdenen. Forældrene og det øvrige omgivende samfund skal have et mere klart billede af, hvad der sker i skolen. Initiativet Klare Mål er derfor en relevant forlængelse af regeringens ønske om en mere åben og gennemsigtig uddannelsessektor.

Folkeskolen er en af demokratiets nøgleinstitutioner, som jeg mener kan vinde i kvalitet og renommé, hvis det daglige arbejde bliver gjort mere synligt for alle.

Ulla Tørnæs

Undervisningsminister

Indledning

Klare Mål erstatter folkeskolens tidligere faghæfter. De nye "hæfter" indeholder et uændret formål for faget/emnet, nyformulerede centrale kundskabs- og færdighedsområder (CKF'er), nye vejledende delmål, uændrede læseplaner og en uændret vejledning.

De nye CKF'er beskriver slutmålet for undervisningen i faget og er bindende for alle kommuner. De vejledende delmål udsendes til inspiration for kommunerne, som skal fastlægge de bindende mål for undervisningen på forskellige klassetrin.

Som et særligt aspekt af Klare Mål stilles der fremover krav til kommunerne og skolerne om nærmere at beskrive, hvordan arbejdet med udviklingen af elevernes alsidige personlige udvikling indgår i skolens virksomhed. Det kan fremgå af læseplanerne eller på anden måde. Undervisningsministeriet har udarbejdet et materiale, som kan bruges af kommunerne i arbejdet hermed.

En række fagfolk fra skolens verden, Danmarks Pædagogiske Universitet, Danmarks Lærerforening og faglige foreninger har medvirket til udformningen af teksterne. Andre har læst med og givet gode råd og ideer. Tak til alle for konstruktiv medvirken undervejs. Undervisningsministeriet står for den endelige udformning af materialet.

Kim Mørch Jacobsen

Uddannelsesdirektør

Indhold

Formål for faget Matematik.....	2
Centrale kundskabs- og færdighedsområder for faget Matematik.....	3
Delmål for faget Matematik.....	5
Efter 3. klassetrin	5
Efter 6. klassetrin	6
Efter 9. klassetrin	7
Efter 10. klassetrin	8
Læseplan for faget Matematik.....	11
Matematik.....	11
Undervisning på begyndertrinnet.....	11
(1.- 3. klasse)	11
Undervisning på mellemtrinnet (3.- 7. klasse).....	12
Undervisning på afsluttende trin	15
Undervisningen på 10. klassetrin	18
Vejledning for faget Matematik.....	21
Indledning	21
Matematiklærer i folkeskolen.....	21
Faglig-pædagogiske områder.....	27
Tal og algebra.....	27
Matematik i anvendelse.....	40
Geometri.....	49
Undervisningsforløb.....	62
Talforståelse og arbejde med konkrete materialer	63
Organisering af undervisningen i grupper	68
Undersøgelser	72
Elevstyrede eksperimenter	76
Miljø i matematikundervisningen.....	81

Formål for faget Matematik

Formålet med undervisningen i matematik er, at eleverne bliver i stand til at forstå og anvende matematik i sammenhænge, der vedrører dagligliv, samfundsliv og naturforhold. Analyse og argumentation skal indgå i arbejdet med emner og problemstillinger.

Stk. 2. Undervisningen tilrettelægges, så eleverne opbygger matematisk viden og kunnen ud fra egne forudsætninger. Selvstændigt og i fællesskab skal eleverne erfare, at matematik både er et redskab til problemløsning og et kreativt fag. Undervisningen skal give eleverne mulighed for indlevelse og fremme deres fantasi og nysgerrighed.

Stk. 3. Undervisningen skal medvirke til, at eleverne oplever og erkender matematikkens rolle i en kulturel og samfundsmæssig sammenhæng. Med henblik på at kunne tage ansvar og øve indflydelse i et demokratisk fællesskab skal eleverne kunne forholde sig vurderende til matematikkens anvendelse.

Centrale kundskabs- og færdighedsområder for faget Matematik

Der undervises i matematik på alle klassetrin (1. - 10. klasse).

De centrale kundskabs- og færdighedsområder er:

- Arbejde med tal og algebra
- Arbejde med geometri
- Matematik i anvendelse
- Kommunikation og problemløsning

I matematik skal de grundlæggende kundskaber og færdigheder i hvert af de fire områder udvikles som en helhed gennem hele skoleforløbet både i faget matematik, og når matematik indgår i tværgående emner og problemstillinger.

De centrale kundskabs- og færdighedsområder er grundlaget for tilrettelæggelsen, gennemførelsen og evalueringen af undervisningen, således at eleverne kan:

- forstå, arbejde med og analysere problemstillinger af matematisk art i sammenhænge, der vedrører dagligliv, samfundsliv og naturforhold
- udbygge deres matematiske viden med henblik på et videre uddannelsesforløb
- forstå matematik som en del af vores kultur.

Arbejde med tal og algebra

Undervisningen skal lede frem mod, at eleverne har tilegnet sig kundskaber og færdigheder, der sætter dem i stand til at

- anvende tal i forskellige sammenhænge
- arbejde med forskellige skrivemåder for tal
- udvikle og benytte regneregler
- bestemme størrelser ved måling og beregning
- læse og benytte variable samt arbejde med grafiske fremstillinger i koordinatsystem
- vælge og bruge hensigtsmæssige metoder og hjælpemidler til beregning

Arbejde med geometri

Undervisningen skal lede frem mod, at eleverne har tilegnet sig kundskaber og færdigheder, der sætter dem i stand til at

- benytte geometriske metoder og begreber til beskrivelse af ting fra dagligdagen
- arbejde med modeller og fremstille tegninger ud fra givne betingelser
- tolke, benytte og vurdere forskellige typer af tegning
- undersøge og beskrive egenskaber ved plan- og rumgeometriske figurer

Matematik i anvendelse

Undervisningen skal lede frem mod, at eleverne har tilegnet sig kundskaber og færdigheder, der sætter dem i stand til at

- vælge hensigtsmæssig regningsart i givne situationer
- bruge matematik som et redskab til at beskrive eller forudsige en udvikling eller en begivenhed
- arbejde med grafiske fremstillinger
- anvende statistik og vurdere statistiske oplysninger
- forholde sig til sandsynligheder
- erkende matematikkens muligheder og begrænsninger ved anvendelse af matematiske modeller

Kommunikation og problemløsning

Undervisningen skal lede frem mod, at eleverne har tilegnet sig kundskaber og færdigheder, der sætter dem i stand til at

- erkende, formulere og løse problemer ud fra analyse af data og informationer
- argumentere for og give faglige begrundelser for fundne løsninger
- vurdere og tage stilling til sammenhængen mellem problemstilling og løsning
- overskue og behandle matematiske problemstillinger, der ikke er af rutinemæssig art
- benytte undersøgelser, systematiseringer og ræsonnementer til at løse problemer og erkende generelle sammenhænge
- veksle mellem praksis og teori
- anvende relevante faglige udtryk og kommunikere om fagets emner med en passende grad af præcision
- bruge hverdagsprog i samspil med matematikkens sprog - i form af tal, tegning og andre fagudtryk

Delmål for faget Matematik

Efter 3. klassetrin

Forventninger til, hvad eleverne almindeligvis kan og ved inden for området:

Tallene som værktøj i matematikken

- kende til de naturlige tals opbygning, herunder rækkefølger, tælleremser og titalssystemet
- bestemme antal ved at anvende simpel hovedregning, tællematerialer, lommeregner og skriftlige notater
- kende eksempler på praktiske problemstillinger, der løses ved addition og subtraktion
- arbejde med forberedende multiplikation og helt enkel division, fx i form af fordelinger
- kende til eksempler på brug af decimaltal, fx i forbindelse med penge, og enkle brøker som en halv og en kvart

Form og tegning som geometriens udgangspunkt

- tale om dagligdags ting og billeder med brug af det geometriske sprog med udgangspunkt i former, beliggenhed og størrelser
- arbejde med enkle, konkrete modeller og gengive træk fra virkeligheden ved tegning
- undersøge og beskrive mønstre, herunder symmetri
- arbejde med enkel måling af afstand, flade, rum og vægt
- undersøge og eksperimentere inden for geometri, herunder ved anvendelse af computeren

Matematik i anvendelse

- vælge og benytte regningsart i forskellige praktiske sammenhænge
- kende til, hvordan tal kan forbindes med begivenheder i dagligdagen
- indsamle og ordne ting efter antal, form, størrelse og andre egenskaber
- behandle data, herunder ved hjælp af lommeregner og computer
- opnå erfaringer med "tilfældighed" gennem spil og eksperimenter

Problemløsning og arbejdsmetoder

- arbejde med informationer fra dagligdagen, som indeholder matematikfaglige udtryk
- beskrive enkle løsningsmetoder, herunder ved brug af tegning
- kende til problemløsning som et element i arbejdet med matematik
- Anvende forskellige metoder, arbejdsformer og redskaber til løsning af matematiske problemer
- samarbejde med andre om at løse problemer, hvor matematik benyttes
- gennemføre eksperimenter og undersøgelser med sigte på at finde mønstre

Efter 6. klassetrin

Forventninger til, hvad eleverne almindeligvis kan og ved inden for området:

Tallene som værktøj i matematikken

- kende til de hele tal, decimaltal og brøker
- benytte erfaringer fra hverdagen sammen med arbejdet i skolen ved opbygningen af talforståelse
- kende tallenes ordning, tallinjen, positionssystemet og de fire regningsarter
- benytte hovedregning, overslagsregning og skriftlige udregninger
- anvende lommeregner og computer ved gennemførelse af beregninger
- arbejde med optællinger og eksempler på sammenhænge og regler inden for de fire regningsarter
- kende til koordinatsystemet og herunder sammenhængen mellem tal og tegning
- kende til eksempler på brug af variable, herunder som de indgår i formler, enkle ligninger og funktioner
- kende til procentbegrebet og forbinde begrebet med hverdags erfaringer
- regne med decimaltal og benytte brøker knyttet til procent og konkrete sammenhænge
- arbejde med "forandringer" og strukturer, herunder som de indgår i talfølger, figurrækker og mønstre

Form og tegning som geometriens udgangspunkt

- benytte geometriske metoder og begreber i beskrivelse af fysiske objekter fra dagligdagen, herunder figurer og mønstre
- undersøge og beskrive enkle figurer tegnet i planen
- kende til grundlæggende geometriske begreber, som vinkler og parallelitet
- arbejde med fysiske modeller og enkle tegninger af dem, især som arbejdstegning, isometrisk tegning eller enkel perspektivisk tegning
- kende til forskellige kulturers metoder til at angive dybde i billeder
- undersøge de enkelte tegnemeters anvendelighed til beskrivelse af form og afstand
- måle og beregne omkreds, areal og rumfang i konkrete situationer
- tegne, undersøge og eksperimentere med geometriske figurer, herunder også ved at benytte computer

Matematik i anvendelse

- vælge og benytte regningsarter i forskellige sammenhænge
- anvende og forstå enkle informationer, som indeholder matematikfaglige udtryk
- anvende faglige redskaber, herunder tal, grafisk afbildning og statistik, til løsningen af matematiske problemstillinger fra dagligliv, familieliv og det nære samfundsliv
- arbejde med enkle procentberegninger,
- beskrive og tolke data og informationer i tabeller og diagrammer
- indsamle og behandle data samt udføre simuleringer, herunder også ved hjælp af en computer
- foretage eksperimenter, hvori tilfældighed og chance indgår

Problemløsning og arbejdsmetoder

- kende til eksperimenterende og undersøgende arbejdsformer
- beskrive løsningsmetoder gennem samtaler og skriftlige notater
- opstille hypoteser, og efterfølgende via "gætte og prøve efter" medvirke til at opbygge faglige begreber og indledende generaliseringer
- formulere, løse og beskrive problemer og i forbindelse hermed anvende forskellige metoder, arbejdsformer og redskaber
- samarbejde med andre om at anvende matematik ved problemløsning
- undersøge, systematisere og begrunde matematisk ud fra arbejde med konkrete materialer

Efter 9. klassetrin

Forventninger til, hvad eleverne almindeligvis kan og ved inden for området:

Arbejde med tal og algebra

- kende de rationale tal samt udvidelsen til de reelle tal
- kende til den kulturhistoriske betydning af udviklingen af tallene som beskrivelsesmiddel
- arbejde undersøgende, især med systematiske optællinger og med tallenes indbyrdes størrelse som led i opbygning af en generel talforståelse
- benytte hovedregning, overslagsregning og skriftlige udregninger
- anvende lommeregner og computer ved gennemførelse af beregninger og problemløsning
- benytte formler, herunder i forbindelse med beregning af rente og rumfang
- forstå og anvende udtryk, hvori der indgår variable
- kende og anvende procentbegrebet
- regne med brøker, herunder i forbindelse med løsning af ligninger og algebraiske problemer
- undersøge og beskrive "forandringer" og strukturer, herunder i talfølger, figurrækker og mønstre
- kende funktionsbegrebet
- bestemme løsninger til ligninger og ligningssystemer med grafiske metoder
- løse enkle ligninger og ved inspektion løse enkle uligheder

Arbejde med geometri

- kende og anvende forskellige geometriske figurers egenskaber
- fremstille tegninger efter givne forudsætninger
- benytte grundlæggende geometriske begreber, herunder størrelsesforhold og linjers indbyrdes beliggenhed
- forstå og fremstille arbejdstegning, isometrisk tegning og perspektivisk tegning ved beskrivelse af den omgivende verden
- undersøge, beskrive og vurdere sammenhænge mellem tegning og tegnet objekt
- kende og anvende målingsbegrebet, herunder måling og beregning af omkreds, flade og rum
- kende og anvende målestoksforhold, lighedannethed og kongruens

- udføre enkle geometriske beregninger, herunder ved hjælp af Pythagoras' sætning
- arbejde med enkle geometriske beviser
- benytte computeren til tegning, undersøgelser og beregninger vedrørende geometriske figurer

Matematik i anvendelse

- vælge regningsarter, benytte procentbegrebet og anvende forholdsregning i forskellige sammenhænge
- behandle eksempler på problemstillinger knyttet til samfundsmæssig udvikling, hvori økonomi, teknologi og miljø indgår
- foretage økonomiske overvejelser vedrørende dagligdagens indkøb, transport, boligforhold, lønopsøgelser og skatteberegninger
- arbejde med rente og foretage renteberegninger, især i tilknytning til opsparing, låntagning og kreditkøb
- arbejde med og undersøge matematiske modeller, hvori formler og funktioner indgår
- arbejde med statistiske beskrivelser af indsamlede data, hvor der lægges vægt på metode og fortolkning
- udføre simuleringer, herunder ved hjælp af computeren
- kende det statistiske sandsynlighedsbegreb
- benytte computeren til beregninger, simuleringer, undersøgelser og beskrivelser, også på baggrund af samfundsmæssige forhold
- anvende matematik som værktøj til løsning af praktiske og teoretiske problemer på en alsidig måde

Kommunikation og problemløsning

- forstå og forholde sig til informationer, som indeholder matematikfaglige udtryk
- problemformulere, beskrive fremgangsmåder og angive løsninger på forståelig vis, såvel skriftligt som mundtligt
- benytte eksperimenterende og undersøgende arbejdsformer og formulere resultater af den faglige indsigt, der er opnået
- vælge hensigtsmæssig faglig metode, arbejdsform og redskab ved løsning af problemstillinger af tværgående art
- samarbejde med andre om at løse problemer ved hjælp af matematik
- anvende systematiseringer og matematiske ræsonnementer
- benytte variable og symboler, når regler og sammenhænge skal bevises
- benytte geometrisk tegning til at formulere hypoteser og gennemføre ræsonnementer
- forstå, at valget af en matematisk model kan afspejle en bestemt værdinorm
- veksle mellem praktiske og teoretiske overvejelser ved løsningen af matematiske problemstillinger

Efter 10. klasses trin

Forventninger til, hvad eleverne almindeligvis kan og ved inden for området:

Arbejde med tal og algebra

- kende de rationale tal samt udvidelsen til de reelle tal
- kende til den kulturhistoriske betydning af udviklingen af tallene som beskrivelsesmiddel
- arbejde undersøgende, især med systematiske optællinger og med tallenes indbyrdes størrelse som led i opbygning af en generel talforståelse
- benytte hovedregning, overslagsregning og skriftlige udregninger
- anvende lommeregner og computer ved gennemførelse af beregninger og problemløsning
- benytte kendte og ikke-kendte formler, herunder beregning af rente og rumfang
- forstå og anvende udtryk, hvori der indgår variable
- anvende og forstå procentbegrebet
- regne med brøker, herunder i forbindelse med løsning af ligninger og algebraiske problemer
- undersøge og beskrive "forandringer" og strukturer
- anvende funktioner til at beskrive sammenhænge og forandringer, herunder procentuel vækst
- vælge metode til bestemmelse af løsninger til ligninger, ligningssystemer og enkle uligheder

Arbejde med geometri

- kende, anvende og beskrive forskellige geometriske figurers egenskaber
- fremstille tegninger efter givne forudsætninger
- benytte grundlæggende geometriske begreber, herunder størrelsesforhold og linjers indbyrdes beliggenhed
- forstå og fremstille arbejdstegning, isometrisk tegning og perspektivisk tegning ved beskrivelse af den omgivende verden
- undersøge, beskrive og vurdere sammenhænge mellem tegning og tegnet objekt
- kende og anvende målingsbegrebet, herunder måling og beregning af omkreds, flade og rum
- kende og anvende målestoksforhold, lighedannede og kongruens
- udføre enkle geometriske beregninger, herunder ved hjælp af Pythagoras' sætning
- arbejde med enkle geometriske beviser
- benytte computeren til tegning, undersøgelser og beregninger vedrørende geometriske figurer

Matematik i anvendelse

- vælge regningsarter, benytte procentbegrebet og anvende forholdsregning i forskellige sammenhænge
- anvende matematik knyttet til problemstillinger, der vedrører natur, samfund og kultur
- arbejde med økonomiske forhold, herunder vedrørende arbejde, fritid og sundhed
- undersøge sammenhænge mellem privatøkonomi og samfundsøkonomi
- forholde sig til beskrivelser og argumentationer af faglig art, som de fremtræder i medierne
- arbejde med, vurdere og tolke forhold vedrørende opsparing, afbetaling, låntagning og kreditkøb
- have viden om matematikkens muligheder og begrænsninger som beskrivelsesmiddel og beslutningsgrundlag
- arbejde med statistiske beskrivelser af indsamlede data, hvor der lægges vægt på metode og fortolkning
- udføre simuleringer ved hjælp af computeren
- kende det statistiske sandsynlighedsbegreb og stikprøveundersøgelser

- benytte computeren til beregninger, simuleringer, undersøgelser og beskrivelser
- anvende matematik som værktøj til løsning af praktiske og teoretiske problemer på en alsidig måde

Kommunikation og problemløsning

- forstå og forholde sig til informationer, som indeholder matematikfaglige udtryk
- problemformulere, beskrive fremgangsmåder og angive løsninger på forståelig vis, såvel skriftligt som mundtligt
- benytte eksperimenterende og undersøgende arbejdsformer og formulere resultater af den faglige indsigt, der er opnået
- vælge hensigtsmæssig faglig metode, arbejdsform og redskab ved løsning af problemstillinger af tværgående art
- samarbejde med andre om at løse problemer ved hjælp af matematik
- anvende systematiseringer og matematiske ræsonnementer
- benytte variable og symboler, når regler og sammenhænge skal bevises
- benytte geometrisk tegning til at formulere hypoteser og gennemføre ræsonnementer
- forstå, at valget af en matematisk model kan afspejle en bestemt værdinorm
- veksle mellem praktiske og teoretiske overvejelser ved løsningen af matematiske problemstillinger

Læseplan for faget Matematik

Matematik

Undervisning på begyndertrinnet

(1.- 3. klasse)

Undervisningen bygger på de mange forudsætninger, som eleverne har, når de begynder i skolen. Eleverne benytter tal i forbindelse med dagligdags begivenheder. De har erfaring med at beskrive ting og oplevelser ved at tegne, og de er i stand til at forstå informationer, som indeholder faglige udtryk.

Eleverne bygger videre på deres forskellige faglige erfaringer ved at deltage i lege, spil og undersøgelser på skolen og i dens omgivelser. Den intuitive matematikforståelse, som eleverne betjener sig af, udvikler sig gradvist til matematisk begrebsdannelse.

I arbejdet benytter eleverne forskellige udtryksformer og inddrager kroppen, sanserne og sproget.

Eleverne arbejder i meningsfyldte sammenhænge med indsamling og ordning af ting efter form, størrelse og andre egenskaber.

Antal, rækkefølge og størrelse knyttet til aktuelle forhold i elevernes dagligdag inddrages. Enkle diagrammer anvendes til at beskrive iagttagelser og undersøgelser.

Ved opbygningen af den grundlæggende talforståelse benyttes

- tælleremser, fx 1, 2, 3,.... og
- 10, 20, 30,....,
- tællematerialer,
- tegninger, måleredskaber mv.

Den enkelte elev skal have mulighed for at udvikle egne metoder til antalsbestemmelse ved addition og subtraktion. Hovedregning, lommeregner og skriftlige notater indgår i et samspil i arbejdet med tallene.

Gennem beskæftigelse med begreber som fx "at fordoble", "3 gange så meget", "at fordele med 5 til hver", "at halvere" kan arbejdet med multiplikation og division forberedes.

Geometrien indledes med iagttagelser af og samtaler om dagligdags ting og billeder heraf. I arbejdet indgår bygning af modeller og gengivelse af virkeligheden ved tegning. I den forbindelse inddrages geometriske betragtninger om form, symmetri og størrelsesforhold.

Indledende aktiviteter vedrørende måling af afstand, flade, rum og vægt med selvvalgte eller standardiserede enheder forbereder en senere beskæftigelse med et alment målingsbegreb.

I forbindelse med spil og eksperimenter kan eleverne gøre indledende erfaringer med tilfældighed og chance.

Problemløsning er et vigtigt fagligt element i beskæftigelsen med alle områder af faget, især i tilknytning til arbejde med eksperimenter og gennemførelse af undersøgelser. Eleverne kan begynde at behandle spørgsmål som:

- Hvordan går det, hvis...?
- Mon det er sådan, fordi...?

Computeren kan i en række tilfælde inddrages i en eksperimenterende arbejdsform.

Undervisning på mellemtrinnet (3.- 7. klasse)

På mellemtrinnet er det vigtigt, at eleverne opnår tillid til, at de gennem faget kan opbygge et alsidigt værktøj til løsning af praktiske og teoretiske problemer. Gennem samarbejde skal eleverne have mulighed for at erkende fællesskabets betydning for tilegnelsen af faget.

Hverdagserfaringer og de erfaringer, eleverne får i skolen, er fortsat udgangspunktet for undervisningen. Eleverne udvikler forståelse af matematikken og dens tilblivelse gennem deres selvstændige medvirken ved opbygningen af de faglige begreber.

Tallene som værktøj i matematikken

I arbejdet med tallene beskæftiger eleverne sig med

- udbygning af talforståelsen i et samspil mellem hovedregning, herunder overslagsregning, brug af lommeregner og skriftlige notater
- positionssystemet
- undersøgelse af sammenhænge og regler inden for de fire regningsarter.

I arbejdet med de naturlige tal udvikler eleverne fortsat egne beregningsmetoder. Standardiserede regneopstillinger indføres, hvis det for eleven er en forenkling af arbejdet.

Tallenes anvendelse som beskrivelsesmiddel over for den praktiske virkelighed inddrages.

Ud fra de forudsætninger, som er grundlagt gennem arbejdet med tallene og regningsarterne, arbejdes der med

- udvidelse af de naturlige tal til de hele tals område
- tallenes ordning og tallinjen
- koordinatsystemet, herunder sammenhængen mellem tal og tegninger
- ligheder og uligheder
- variable som pladsholdere for tal.

Ved udvidelsen af talområdet til decimaltal og brøker bygges på elevernes hverdags erfaringer. Begrebsdannelsen støttes gennem anvendelse af såvel symbolrepræsentation som geometrisk repræsentation.

Brøkbegrebet indgår på en sådan måde i undervisningen, at det først og fremmest udvider elevernes talforståelse, samtidig med at de opnår en vis færdighed i regning med brøker. Ved beregningsopgaver kan brøker ofte erstattes med decimaltal.

Procentbegrebet indføres som en særlig anvendelse af brøkbegrebet og med udgangspunkt i de mange eksempler, som kan hentes fra dagligdagen. Arbejdet med procent kan med fordel støttes på

geometrisk beskrivelse.

Decimaltal, brøker og procent skal for eleverne fremtræde som tre forskellige måder at angive samme forhold på.

Ved løsning af problemer arbejdes der med sammenhængen mellem det beskrevne problem og elevens valg af regningsarter.

Ved arbejdet med tallene og deres egenskaber lægges der først og fremmest vægt på indsigt i og forståelse af grundlæggende begreber og sammenhænge. Færdighed i regning skal ses i sammenhæng med, hvorledes lommeregner og computer kan anvendes ved gennemførelsen af beregninger.

Form og tegning som geometriens udgangspunkt

Eleverne arbejder med iagttagelse af fysiske objekter fra dagligdagen, bygning af rumlige modeller og eksperimenter med konkrete materialer.

Heri indgår

- tegning, måling og beregning
- beskrivelse og tolkning af figurer tegnet i ét plan som en arbejdstegning
- isometrisk tegning
- indledende iagttagelser vedrørende perspektivtegning
- forskellige kulturers metoder til at angive dybde i billeder.

Sammenhænge mellem tegningen og det afbildede objekt undersøges. I undersøgelserne indgår

- grundlæggende principper og begreber som størrelsesforhold og linjers indbyrdes beliggenhed, herunder begreber som vinkel og parallelitet
- vurdering af de enkelte tegnetoders anvendelighed til beskrivelse af form og afstand.

Tegningen opfattet som en model af virkeligheden kan også danne udgangspunkt for indledende overvejelser om brugen af matematiske modeller. Eleverne udvikler deres sprogbrug herom med inddragelse af geometriske begreber.

Gennem aktiviteter med selvvalgte og standardiserede enheder udbygger eleven sit kendskab til målingsbegrebet. Der arbejdes med

- måling og beregning af omkreds, flade og rum
- metoder til bestemmelse af areal ud fra geometriske iagttagelser, fx at eleverne ræsonnerer sig til, at arealet af en trekant er halvdelen af en tilsvarende firkants areal.

Figurer og mønstre i friser, mosaikker, tekstiler mv. rummer mange muligheder for iagttagelse af, overvejelser om og arbejde med geometriske forhold.

Computeren kan anvendes til tegning af og eksperimenter med geometriske figurer.

Matematik i anvendelse

I arbejdet med forhold, som vedrører elevernes liv, familiens liv og det nære samfundsliv benyttes en række faglige redskaber som tallene, grafisk afbildning og hjælpemidler fra statistik.

I forbindelse med matematikkens anvendelse skal eleverne stifte bekendtskab med

- forenklede problemstillinger fra det teknologiske og det naturvidenskabelige område
- metoder til at registrere og skabe overblik over resultatet af undersøgelser
- beskrivelse af data og informationer ved hjælp af tabeller og diagrammer, herunder indsamling af små datamængder og behandling af disse ved hjælp af computer.

Eleverne udfører desuden eksperimenter, hvori tilfældighed indgår. Begrebet sandsynlighed fremtræder som en første præcisering af et mere intuitivt chancebegreb. Simulering af eksperimenter gennemføres ved hjælp af computer.

Problemløsning og arbejdsmetoder

Eleverne skal i arbejdet med alle områder af faget have mulighed for at tilegne sig grundlæggende arbejdsmetoder som problemformulering, undersøgelse og beskrivelse af regler.

I forbindelse med problemformulering og undersøgelser arbejder eleverne med at opstille hypoteser, som på dette trin har karakter af "at gætte og prøve efter".

Det er en del af denne aktivitet, at eleverne formulerer problemstillinger og overvejelser over, hvordan matematikken kan benyttes, så den giver svar på de stillede spørgsmål. Undersøgelserne kan både være knyttet til fagets anvendelsesside og til problemstillinger, der formuleres for at belyse faglige begreber.

Der kan være tale om at arbejde i afgrænsede miljøer gennem anvendelse af konkrete materialer, fx arbejde på "søbræt", eller anvendelse af programmer på computer.

Samtale om de faglige begreber og aktiviteter er centralt placeret i undervisningen. I fællesskab formulerer eleverne regler for de erfaringer og den indsigt, de har opnået.

Undervisning på afsluttende trin

(7.-9. klasse)

På dette trin kan eleverne i højere grad selvstændigt planlægge deres egne aktiviteter og faglige fordybelse i emner og områder. De kan på egen hånd og i samarbejde med andre tilegne sig nyt fagligt stof, og de kan arbejde med nye anvendelser af matematikken.

Beregning og tegning kan foregå ved hjælp af lommeregner og computer. Arbejdet med emner og problemstillinger kan derved koncentreres om, hvordan matematikken kan bidrage til at belyse foreliggende problemer.

Arbejde med tal og algebra

Udvidelsen af talområdet fra de naturlige tal til de hele tal og til de rationale tal giver på dette trin anledning til mere indgående at studere tallenes egenskaber og samspillet mellem

regningsarterne, herunder regningsarternes hierarki. Potenser benyttes som en bekvem skrivemåde.

Brøker anvendes i de naturlige sammenhænge, de optræder i. Omfanget af regningen med brøker afpasses under hensyn til brugen af dem i forbindelse med ligningsløsning og andre algebraiske emner.

I situationer, hvor de rationale tal ikke slår til ved løsning af et problem, kan eleverne arbejde med udvidelsen til de reelle tals område. Ved regning med kvadratrødder kan lommeregneren anvendes. Tallenes indbyrdes størrelse studeres som et led i opbygningen af en generel talforståelse.

Den kulturhistoriske betydning af udviklingen af tallene som beskrivelsesmiddel inddrages.

Anvendelsen af variable som pladsholdere for tal belyses gennem praktiske og teoretiske problemstillinger. Der lægges vægt på, at eleverne kan læse, forstå og anvende udtryk, hvori der indgår variable.

Der arbejdes med

- formler, fx i forbindelse med beregning af rente og rumfang
- eksempler på formler vedrørende forhold i omverdenen også i tilfælde, hvor formlerne ikke udledes i forbindelse med undervisningen
- undersøgelse af "forandringer", fx sådanne, som findes i talfølger, figurrækker og mønstre, hvor eleverne forsøger at beskrive eller at opstille simple formler, som udtrykker sammenhængen.

I arbejdet med funktionsbegrebet indgår

- ligefrem og omvendt proportionalitet
- funktionerne $y = ax$, $y = ax + b$ og $y = a : x$ i et nært samspil med praktiske problemer fra dagligdagen
- tabeller, grafer og ligninger som forskellige repræsentationsformer for funktioner
- grafisk afbildning i koordinatsystemet af andre funktioner.

Eleverne arbejder med løsning af enkle ligninger. Gennem ræsonnementer og efterprøvning udvikler de metoder til at finde løsningen til en ligning. Grafisk løsning af ligninger og ligningssystemer indgår.

Eleverne skal have mulighed for efterhånden at afklare, at omformning af ligninger og reduktion af udtryk er midler til at forenkle en problemløsning.

Arbejde med geometri

Gennem arbejdet med en tegnet gengivelse af virkeligheden skal eleverne have mulighed for at forstå, fortolke og selv fremstille tegninger og konstruktioner. Arbejdstegning, isometrisk tegning og perspektivtegning indgår.

De enkelte tegnet metoderes troværdighed som modeller til beskrivelse af bestemte træk ved den virkelighed, som gengives, klarlægges gennem undersøgelser. Det skal herved fremgå, at informationer forsvinder ved brug af forskellige metoder: Fx at man ikke med en lineal kan måle virkelige afstande på en perspektivtegning.

Ved alle typer af tegning arbejdes der med

- grundlæggende geometriske konstruktioner og egenskaber ved geometriske figurer
- målestoksforhold, lighedannede og kongruens
- beregninger ved hjælp af bl.a. Pythagoras sætning.

I arbejdet med geometrien kan der desuden indgå enkle beviser.

Der kan arbejdes med enkle beskrivelser af figurer i både to- og tredimensionale koordinatsystemer, bl.a. med anvendelse af computeren.

Forskellige kulturers kunst, arkitektur, udsmykning og design indgår i arbejdet med udvalgte emner fra geometrien.

Matematik i anvendelse

Matematikens anvendelse som et redskab til at behandle problemstillinger knyttet til den samfundsmæssige udvikling, herunder økonomi, teknologi og miljø, belyses gennem udvalgte eksempler.

I enkle tilfælde skal eleverne arbejde med matematiske modeller som fx formler og funktioner. Anvendelse af enkle matematiske modeller i forbindelse med brug af computeren til undersøgelser og beskrivelser af samfundsmæssige forhold inddrages. I arbejdet med modellerne sættes de fundne matematiske resultater i relation til de helheder og sammenhænge, hvori de indgår.

Eleverne arbejder med økonomiske overvejelser vedrørende

- dagligdagens indkøb, transport og boligforhold
- lønopsøgelser og skatteberegninger
- rentebegrebet, bl.a. i tilknytning til opsparing, låntagning og kreditkøb.

Eleverne undersøger og fortolker statistiske beskrivelser, således som de benyttes i medierne og i andre fag. Der arbejdes med, hvorledes valget af den måde, resultaterne fremstilles på, kan indvirke på opfattelsen af de foreliggende data.

Sandsynlighedsbegrebet indgår i forbindelse med behandling af datamaterialer. Vægten lægges på det statistiske sandsynlighedsbegreb. Simuleringer foretages ved hjælp af computeren.

Elevernes valg af regningsarter, anvendelse af forholdsregning og benyttelse af procentbegrebet i mange forskellige sammenhænge skal stå centralt i beskæftigelsen med fagets anvendelse.

Kommunikation og problemløsning

Ræsonnementer og abstraktioner præger i stigende grad arbejdet med faget, og mere præcise faglige og sproglige beskrivelser kan benyttes til at redegøre for tankegange og som led i kommunikationen.

Der indgår eksempler på, hvordan variable og symboler benyttes, når man beviser regler og sammenhænge i matematikken. I arbejdet med bl.a. geometrisk tegning vil der være mange muligheder for at formulere hypoteser og gennemføre ræsonnementer. Herved belyses en vigtig side af fagets arbejdsmetode.

Ved anvendelse af matematiske modeller tages der stilling til den forenkling af det foreliggende problem, som kan være indbygget i modellen. Det vil også være muligt at overveje, hvilke værdinormer der ligger bag valget af en bestemt matematisk model.

Undervisningen på 10. klassetrin

Elevernes større modenhed bevirker, at de på dette klassetrin er mere bevidste om deres fremtidige behov for at kunne forstå og benytte matematik.

De områder, der er omtalt på afsluttende trin, og som man vælger at beskæftige sig med, kan få en bredere og mere dybtgående behandling.

Eleverne inddrages i overvejelser over, på hvilket abstraktionsniveau og i hvilket omfang, de vil behandle de udvalgte emner.

Matematik i anvendelse

På dette klassetrin vil fagets anvendelse være knyttet til forhold, der vedrører natur, samfund og kultur.

Eleverne skal arbejde med økonomiske forhold, fx vedrørende arbejde, fritid og sundhed. Sammenhænge mellem privatøkonomien og samfundsøkonomien inddrages.

I arbejdet med menneskets samspil med naturen skal eleverne beskæftige sig med matematikkens muligheder og begrænsninger som beskrivelsesmiddel og som grundlag for at træffe beslutninger. Med udgangspunkt i den matematiske beskrivelse kan spørgsmål af betydning for miljø og menneskets levevilkår inddrages, fx om energiforbrug, affald og ressourcer.

Eleverne skal ud fra autentisk materiale, fx ved at drøfte avisartikler eller tv-udsendelser, forholde sig til, hvordan matematik indgår i beskrivelser og argumentation. De skal fagligt begrunde egne overvejelser vedrørende sådanne situationer.

Faglige begreber og metoder

I forskellig grad kan eleverne arbejde med, hvordan matematikken opbygges, og hvordan fagets begreber og metoder anvendes. Det er muligt at arbejde med fælles begrebsområder, som behandles på forskellige abstraktionsniveauer.

Der skal arbejdes med

- en udvidet forståelse af funktionsbegrebet som et middel til at beskrive sammenhænge og forandringer
- ikke-lineære sammenhænge, fx procentuel vækst
- statistiske beskrivelser, hvor der lægges vægt på metode og fortolkning
- stikprøveundersøgelser, fx i forbindelse med meningsmålinger
- geometrisk beskrivelse af den omgivende verden, som den forekommer i teknologi, arkitektur, design og kunst.

I arbejdet indgår systematiseringer og ræsonnementer dels i relation til matematikkens anvendelse, dels i relation til teoretiske overvejelser. Ved løsning af problemer indgår overvejelser vedrørende valg af metode, set i sammenhæng med den måde problemet er beskrevet på.

Arbejdet med ligninger og andre emner fra algebraen kan gennemføres ved hjælp af grafisk illustration, med elektronisk databehandling, eller i en teoretisk sammenhæng.

Ved løsning af geometriske problemer benytter eleverne tegning, måling eller beregning. Edb-programmer kan anvendes som hjælpemiddel.

Vejledning for faget Matematik

Indledning

Faget matematik i folkeskolen er så omfattende, at det er nødvendigt i undervisningsvejledningen at vælge emner og perspektiver ud, som må vurderes som særligt vigtige eller særligt karakteristiske for det fag, som er beskrevet i læseplanen.

Undervisning i et fag er samtidig et komplekst samspil mellem den rolle, læreren påtager sig, de pædagogiske overvejelser i forbindelse med det faglige indhold og selve undervisningsplanlægningen. Dette samspil er søgt tilgodeset ved at skrive undervisningsvejledningen i 3 hovedafsnit, som for så vidt kan læses uafhængigt af hinanden, men som kun tilsammen giver et nogenlunde dækkende billede af intentionerne bag læseplanens beskrivelse af faget.

Matematiklærer i folkeskolen anskuer undervisningen ud fra lærerens rolle og beskriver først og fremmest en række af de opgaver, læreren skal løse i forhold til faget og til eleverne.

Faglig-pædagogiske områder indeholder overvejelser om fagets hovedområder og præsenterer vigtige nydannelser i læseplanen. Der er tale om en faglig tilgang til udvalgte emner, men de faglige overvejelser kan naturligvis ikke adskilles fra pædagogiske overvejelser om læringssyn, undervisningstilrettelæggelse mv.

Undervisningsforløb tager først og fremmest udgangspunkt i eksempler på undervisning på forskellige klassetrin, men indeholder også faglige elementer, som i nogen grad supplerer det foregående afsnit. Beskrivelserne er eksemplariske, således at den faglig-pædagogiske tankegang let må kunne overføres til andre klassetrin end de angivne.

Matematiklærer i folkeskolen

Folkeskolelovens krav om, at undervisningen skal tilrettelægges ud fra den enkelte elevs behov og forudsætninger, rummer mange udfordringer for læreren i matematik, bl.a. på baggrund af den forhistorie, faget har.

Desuden vil bestemmelserne i loven om, at der i et samarbejde mellem læreren og den enkelte elev løbende skal fastlægges mål for undervisningen - og som følge heraf også foretages en løbende evaluering - lægge op til nye og mere nuancerede vurderingsformer over for elevens faglige produkter og arbejdsformer. Den traditionelle "facit-orienterede" bedømmelse vil ikke længere være tilstrækkelig.

Den vejledende læseplan bygger da også på den forudsætning, at læreren med udgangspunkt i en bred faglig-pædagogisk kompetence kan skabe sammenhæng mellem den enkelte elevs forudsætninger, undervisningsformen og det faglige indhold.



**Billedet er ikke medtaget
på grund af
ophavsret**

Viggo Hartz

Valg af fagligt indhold og faglige metoder

Indholdet af skolens matematikundervisning har ofte været anskuet i forhold til videnskabsfaget matematik. Der er imidlertid en markant forskel på den opgave, fagmatematikeren har set i forhold til folkeskolelæreren. Fagmatematikeren skal først og fremmest beskæftige sig med og undervise i matematik, sådan som videnskabsfaget nu engang er. Matematiklæreren i skolen skal derimod i høj grad selv vælge det faglige indhold inden for læseplanens rammer, så det lever op til skolens og fagets formålsbeskrivelse.

Hensigten med skolens undervisning er ikke at gøre eleverne til matematikere. Faget skal bidrage til den enkelte elevs personlige udvikling, og eleverne skal opleve og på nogle områder blive fortrolige med, hvordan faget giver dem handlemuligheder i praktiske situationer. Der vil være områder fra matematikken, som eleverne blot skal kende betydningen af uden nødvendigvis selv at kunne anvende dem.

Det er lærerens opgave inden for den gældende læseplans rammer at vælge indhold og metoder, som er eksemplariske for faget. Som lærer må man se i øjnene, dels at man ikke i så stort et fag kan nå det hele, dels at det er muligt at foretage valget på flere måder, som fagligt set er lige kvalificerede.

Eksempelvis kan man forestille sig, at beskæftigelsen med brøker på mellemtrinnet sker gennem aktiviteter med tilfældige eksperimenter og begrundes ud fra overvejelser om sandsynlighed. Et andet valg af metode til indlæringen af det samme område kunne være at anvende geometrisk

illustration, fx ved anvendelse af centicubes. Begge valg af faglig metode har fordele og begrænsninger, og det er lærerens opgave at foretage en afvejning heraf.

En anden form for indholdsvalg hænger sammen med kravet om at gennemføre en differentieret undervisningsform, der tager udgangspunkt i den enkelte elevs behov og forudsætninger. Der kan være tale om, at nogle elever i en klasse har vanskeligheder med at tilegne sig et bestemt begreb eller område og fx ikke magter det forelagte abstraktionsniveau. Så må læreren give disse elever mulighed for at vælge en anden "ikklædning" på et andet abstraktionsniveau af den pågældende problemstilling, og denne udformning skal samtidig stadig være eksemplarisk for problemet.

Eleverne har ikke det samme udgangspunkt, og de lærer ikke på samme måde. Nogle elever lærer bedst, når de arbejder med visuelle repræsentationer af det aktuelle stof. Andre skal helst være følelsesmæssigt engagerede i arbejdet for at få fuldt udbytte af det, osv.

Der kan fx være tale om, at det for nogle elever på mellemtrinnet er umiddelbart forståeligt, at gennemsnittet findes ved at lægge de forelagte tal sammen og derefter dividere summen med antallet af tal, mens en sådan forklaring er "sort tale" for andre. For disse elever kan forståelsen måske opnås umiddelbart, hvis tallene "bygges" af klodser i søjler, som derefter forsøges gjort "lige høje". "Hvis disse tal allesammen var lige store, så vil de være mellem 4 og 5 - og nærmest 5". Et sådant udsagn kan være udtryk for en langt dybere indsigt end det at kunne anvende en udenadlært regel.

En dybtgående indsigt på ét abstraktionsniveau vil ofte på et senere tidspunkt blive afløst af en lige så indgående forståelse på et højere abstraktionsniveau.

Beskrivelsen i den vejledende læseplan bygger grundlæggende på, at faget tager udgangspunkt i dagligdagen og i praktiske sammenhænge og problemstillinger. Ved valget af fagets indhold kan læreren derfor ikke alene begrunde valget med, "hvad der er godt for matematikken". Man må også kunne hente begrundelser fra forskellige af fagets anvendelsesområder og fra andre fagområder.

Brugen af undervisningsmidler i undervisningen

Valget af indhold i undervisningen hænger nøje sammen med valget af lærebogsmaterialer og anvendelsen af andre hjælpemidler.

På et tidspunkt, hvor den vejledende læseplan lægger op til markante ændringer i fagets indhold og undervisningsform, er det nødvendigt at anvende lærebogssystemerne mere nuanceret end tidligere. Samtidig må man være opmærksom på, at lærebogens læringssyn er i overensstemmelse med læseplanen.

Det kan være vanskeligt at vurdere et helt lærebogssystem, og det er vanskeligt at give vejledning i, hvad man særligt skal være opmærksom på, når man her skal vælge. Men det er i hvert fald vigtigt, at lærebogen ikke er så styrende, at lærerens valgmuligheder helt eller delvis forsvinder.

Det kan også være et afgørende kriterium, at læremidlerne åbner flere forskellige veje for eleverne i arbejdet med emner og problemstillinger. Hvis undervisningsmidlerne er tilrettelagt således, at alle trin i processen på forhånd er fastlagt, så gives der meget få muligheder for at imødekomme både den dygtige og den svage elevs særlige behov. Hvis opgaverne altid kun kan føre til ét talmæssigt resultat, hvor eleven aldrig får lejlighed til at svare med begrundelser, så er det kun nogle af fagets aspekter, der undervises i.

Begrundelse af valg

Lærerens begrundelse for valg i undervisningen vil i de kommende år få en fremtrædende plads. Det gælder både over for elever og kolleger, men ikke mindst i forholdet til forældrene. Vi vil ikke kunne forvente, at forældre umiddelbart vil kunne genkende deres egen skoletid i det, som sker i skolen, og de vil derfor i ringere grad kunne bygge deres tillid og tryghed på genkendelsen.

Det ændrede skolebillede kan hænge sammen med de ændrede kriterier for valg af indhold i faget, men kan i høj grad også skyldes den ændrede tilrettelæggelse af undervisningen, såvel i de skemalagte forløb som i forbindelse med fagenes deltagelse i tværgående emner og problemstillinger. Et aktivitets- og emnepræget undervisningsforløb bliver af mange forældre ikke opfattet som "rigtig undervisning" og vil ofte kræve en indgående begrundelse for at opnå accept.

Gennemførelse af en undervisning, hvor eleverne ikke følges ad, bryder også med en traditionel opfattelse af, hvordan matematikundervisning bør foregå. Læreren må derfor være omhyggelig med at forklare forældrene, hvordan undervisningen er organiseret i klassen og begrunde hvorfor.

Endelig er der anledning til at pege på de begrundelsesproblemer, der kan være over for forældrene i forbindelse med den fremtrædende rolle, som lommeregneren og computeren har fået i den vejledende læseplan. Der er her tale om intet mindre end et "kulturskred" i forståelsen af begreber som færdighed, arbejdsform og indsigt i forhold til det billede, som forældrene vil have af faget.

Det er hensigtsmæssigt, at der på skolen opbygges et fagligt miljø, hvor fagkolleger løbende opsamler de erfaringer, som man tilsammen gør. Det vil også give mulighed for, at man i fællesskab studerer de forskellige faglig-pædagogiske teorier, som er udviklet for matematikundervisning. Her kan der hentes værdifuld inspiration i forbindelse med realisering af

matematikfaget i dagligdagen, men teorierne kan måske først og fremmest bidrage til, at læreren med større sikkerhed kan argumentere for et givet valg.

Målsætning og evaluering

Folkeskoleloven indeholder en bestemmelse om, at der i et samarbejde mellem læreren og den enkelte elev løbende skal fastlægges mål for undervisningen, og at disse mål skal danne grundlag for tilrettelæggelsen af den enkelte elevs arbejde med faget.

Men læreren må naturligvis også selv have en overordnet målsætning og foretage en evaluering af undervisningen. Der kan være grund til at præcisere rollefordelingen i forbindelse med de forskellige niveauer i både målsætning og evaluering.

Undervisningen er lærerens ansvar. Det er derfor læreren, der sætter målene for undervisningen. I denne målsætning må læreren naturligvis medtænke elevansvar og elevmålsætning: I hvilken grad og på hvilken måde indgår eleven i netop dette undervisningsforløb?

På samme måde er det læreren, der alene eller sammen med andre lærere evaluerer undervisningen. Det er læreren, der tager stilling til, om det professionelle arbejde, der er udført, har ført til de mål, som blev planlagt forud for undervisningsforløbet. Et sådant undervisningsforløb kan ikke være en enkelt lektion, men må være en periode, hvor hensigten fx kan være "at udvikle strategier for antalsbestemmelse gennem multiplikation af naturlige tal".

Undervisningens hensigt er læring. Denne læring sker gennem elevens aktive indsats, og den er forbundet med elevens bevidsthed om, hvad der i øjeblikket søges lært. Der er her tale om en målsætning for den enkelte elev. Den kan være formuleret af eleven selv eller i et samarbejde mellem lærer og elev. Det afgørende er, at eleven arbejder ud fra den, og det er vigtigt, at eleven gøres bevidst om, at han eller hun har en rolle i læreprocessen. Ansvarligheden skal række ud over "at gøre, hvad der bliver sagt".



Viggo Hartz

Billedet er ikke medtaget på grund af ophavsret

Eleven *skal* selv, og erfaringer viser, at eleven kan selv. Dette princip er i god overensstemmelse med værdigrundlaget bag folkeskoleloven, men det er ikke en hvilken som helst undervisningstilrettelæggelse, som rummer mulighed for at opfylde princippet.

Princippet kan realiseres på forskellige måder, afhængigt af det trin i skoleforløbet, hvor man er. Over for yngre elever vil læreren anvende en anden sprogbrug end over for ældre elever, når hensigter og mål skal beskrives.

Viggo Hartz Grundlæggende må lærerens sigte være, at eleverne på ethvert trin i størst mulig grad identificerer sig med målet for undervisningen - at de "gør det til deres eget".

De skal kende begrundelsen for det aktuelle arbejde og fx vide, "at nu er jeg i gang med at finde regler for, hvordan man bestemmer størrelsen af plane figurer."

Et læringsforløb afsluttes ofte med, at eleven evaluerer forløbet og udbyttet af det. Også her kan det være elevens egen evaluering eller en evaluering, som foretages i samarbejde mellem lærer og elev. Der behøver ikke at være tale om nogen meget formel evaluering. Ofte er en kort samtale tilstrækkelig for at klarlægge, hvad resultatet af forløbet har været, og for at tage stilling til, hvorledes det videre forløb skal være.

Med hensyn til formuleringen af elevens mål for undervisningen vil der være tale om en udvikling, hvor eleven i stigende grad gennem skoleforløbet overtager mere og mere af rollen. På samme måde må eleven i stadig stigende grad gøre det til en del af en arbejdsproces, at den afsluttes med en personlig stillingtagen til arbejdets resultat.

Når elevens eget ansvar således fremhæves, betyder det naturligvis ikke, at der tænkes på en skole befolket af individualister, som passer sig selv. I alle sammenhænge - det gælder både ved rene faglige forløb og ved arbejdet med tværgående emner og problemstillinger - er det af betydning, at elever indgår i et samarbejde med andre elever. Der vil derfor ofte være tale om fælles målsætninger, som gennem samarbejdet bliver tilgodeset på forskellig måde, alt efter elevernes forudsætninger, lyst og interesser.

Man må samtidig være opmærksom på, at matematik er et færdighedstungt fag. Den automatisering af færdigheder - træning - der hele tiden må være en del af arbejdet med faget, vil ofte kunne have karakter af individuelt arbejde, bl.a. fordi eleverne kan befinde sig på forskellige trin i indlæringen.

For nogle elever kan det være et problem at fastholde tilliden til, at de godt kan arbejde med matematik på en selvstændig og kvalificeret måde. Det har en del at gøre med, at store områder af faget rummer færdigheder og begreber, som indgår i den videre opbygning af faget. Mysterier og forståelsen af et enkelt led i denne opbygning, kan hele sammenhængen gå tabt.

Hvis fx den grundlæggende begrebsdannelse vedrørende procent ikke er tilstede, kan det være blokerende for forståelsen af en lang række begreber fra økonomi, handel, vækst osv.

Hovedopgaven for læreren er at få skabt et undervisningsmiljø i klassen, hvor den enkelte elev føler sig medansvarlig for sin egen læring. Kun på den måde kan undervisningen og læringen foregå i et samspil. Det nødvendigt, at eleverne opnår forståelse for, at de indgår i et fællesskab, der tilbyder fordele, men som også kræver hensyntagen. Dialogen med andre kan være af betydning for den enkelte elevs læring, men omvendt kan den viden og kunnen, som eleven opnår som en personlig erkendelse, bidrage til fællesskabet og til et fælles sprog.

En tilrettelæggelse af undervisningen, der bygger på elevernes medansvar, har desuden det sigte at opdrage eleverne til at leve i et demokratisk fællesskab. Herved indgår arbejdet med de faglige emner også i en overordnet sammenhæng.

Faglig-pædagogiske områder

Tal og algebra

Menneskets evne til at benytte symboludtryk i mundtlig og skriftlig kommunikation er en væsentlig forudsætning for vores kultur. Arbejdet med tal og algebra skal ses i denne sammenhæng.

Studiet af tal og relationer imellem tallene er udgangspunktet for den del af undervisningen, der sigter mod at give eleverne en begyndende indsigt i algebraen. Undervisningen må tilrettelægges, så eleverne får indsigt i - og i en vis forstand selv oplever - hvordan menneskene har skabt tallene, og hvordan tallene benyttes til at beskrive forhold fra virkeligheden.

Fra den første forståelse af de naturlige tal til indsigt i de rationale tals verden og videre frem mod nye tal som $\frac{1}{2}$ og $\sqrt{2}$ er der et utal af små og store trin at passere. Tilmed er det sådan, at der er mange forskellige trapper at bevæge sig ad, og ingen kender den rigtige for den enkelte elev. Alligevel skal alle elever helst få et indtryk af hele det spektrum, som tallene udgør.

Fra tal til algebra

Forsøg på at forbedre matematikundervisningen omkring 1960 - kendt under betegnelsen "Ny matematik" - førte i flere tilfælde til en for kraftig formalisering på et for tidligt tidspunkt i skoleforløbet. På baggrund af disse erfaringer kan man konstatere, at formelle opskrivninger som denne:

$$(8+5) = 8+(2+3) = (8+2)+3 = 10+3 = 13$$

hvor regler fra algebraen bruges til at vise, hvorledes man løser opgaven $8 + 5$, ikke fører til den ønskede indsigt hos eleverne. Forud må gå en længere periode med arbejde med konkrete tællematerialer, med praktiske eksempler og samtaler om, hvordan man regner. I et sådant arbejde indgår også overvejelser, der svarer til algebraiske regler, men på et mere uformelt niveau.

Når børn fx leger købmand og tæller, hvor mange penge de har, gør de erfaringer med forskellige måder at regne sammen på. De kan få behov for at overveje, om de har penge nok. De flytter sig herved gradvist fra beskæftigelsen med de konkrete problemstillinger til at gøre sig overvejelser på et mere generelt og overordnet plan, de "teoretiserer".

Elevernes arbejde med regler for behandling af tal vil også senere i skoleforløbet kunne foregå i nær tilknytning til dagligdags problemstillinger:

Hakket flæskesmåkød
pr. kg..... ...65,-

Hvis opgaven går ud på ud fra annoncen at beregne prisen på 600 gram flæskesmåkød, skal teksten først "afkodes". Eleverne skal kunne forstå tallenes betydning i den sammenhæng, de indgår i, og derefter skal der vælges regningsarter og udføres regne-operationer. Man kan sige, at der skal vælges matematisk model til løsning af problemet. Endelig skal resultatets rimelighed vurderes.

Undervejs vil forskellige nedskrivninger af regneudtryk for beregningen kunne forekomme:

$$\begin{aligned}(65:1000 \times 600) &= 39 \\ 65:10 \times 6 &= 39 \\ 65 \times 0,6 &= 39\end{aligned}$$

Er alle tre udtryk svar på opgaven?

Samtaler herom vil være væsentlige led i opbygningen af en forståelse af det algebraiske sprog.

Sådanne overvejelser er forudsætningen for, at algebraen på de ældste klassetrin for eleverne kommer til at fremstå som en måde at beskrive virkelighedens fænomener på.

Hvis der fx diskuteres hastighedsgrænser, kan energisætningen $E=1/2mV^2$ bruges til at belyse, hvordan en ændring af hastigheden V påvirker energien for en bil med massen m . Ved hjælp af algebraiske overvejelser indser eleverne ved at arbejde med formlen, at hastigheden betyder langt mere end massen for energimængden. Forholdet kan evt. tydeliggøres ved at tegne en graf.

I de beskrevne eksempler er peget på, hvordan arbejdet med tal og algebra på forskellige klassetrin kan indgå, når problemstillinger fra dagligdagen behandles. Dette skal ses i modsætning til en undervisning, der udelukkende tilrettelægges med den hensigt at kunne løse rene talopgaver og senere at kunne manipulere med bogstavudtryk. Hermed er ikke taget afstand fra, at det kan være nødvendigt at træne bestemte helt elementære færdigheder, eller at det kan være en personlig tilfredsstillelse at kunne bevæge sig i en symbolverden.

Brug af lommeregneren - og udvikling af egne beregningsmetoder

Elevernes arbejde med de naturlige tal knytter sig til situationer fra hverdagen, og de møder herigennem de fire regningsarter som redskaber, de har brug for til løsning af mange forskellige problemer.

Indtil fremkomsten af de billige lommeregnere har man betragtet skriftlige udregninger i bestemte opstillingsskemaer som en selvfølgelig del af de almene kundskaber.

Den lette adgang til regnetekniske hjælpemidler har ændret på behovet for at træne større skriftlige beregnings-metoder (algoritmer) i undervisningen. Eleverne vil derhjemme, i den faglige undervisning og i arbejdet med tværgående emner og problemstillinger på skolen kunne klare sig ved at benytte hjælpemidlerne.

For undervisningen i matematik betyder det, at der kan arbejdes grundigere med forståelsen af regningsarterne. Og på baggrund af viden om, at børn tænker forskelligt, og at børn på samme klassetrin befinder sig på forskellige udviklingstrin, kan de få mulighed for at benytte mange



**Billedet er ikke medtaget
på grund af
ophavsret**

Viggo Hartz

forskellige - herunder også selvvalgte - repræsentationsformer for regningsarterne. De kan benytte konkrete tællematerialer, tegninger og et mere formelt symbolsprog i et samspil.

Eksempelvis vil man på begyndertrinnet kunne se eleverne benytte følgende fremgangsmåder til bestemmelse af resultatet af multiplikationen 4×3 :



I eksemplerne viser eleverne tydeligt, at de har indsigt i grundlæggende forhold vedrørende multiplikation. De opfatter fx klart, at 4×3 betyder en gentagelse, hvilket kan støtte en erkendelse af multiplikation som en addition af ens addender. Det er muligt, at nogle elever når frem til resultatet ved at tælle alle 12 tern, mens andre benytter række-tællemetoder som: 3, 6, 9, 12.

En sådan åben tilgang til arbejdet kan samtidig være med til at styrke elevernes tro på, at de med udgangspunkt i deres egen viden kan løse et problem. For læreren betyder arbejdsformen, at der hele tiden må tages stilling til, hvilke elever der kan bydes nye udfordringer.

Måske er tidspunktet kommet, hvor eleverne kan benytte lommeregneren til et større fælles undersøgelsesarbejde af typen:

```
Hvor mange gange skal du trykke på 2 og +  
for at få 20? 30? 40?.....  
Kan du også ramme 21? 22? 23?.....  
Kan du ramme 48 ved at trykke på 2 og +?  
Kan du ramme 48 ved at trykke på 3 og +?  
osv.  
Hvor mange gange skal du trykke?
```

Tilsvarende iagttagelser og overvejelser kan man gøre sig i forbindelse med de andre elementære algoritmer. Overvejelser af denne art danner baggrund for en senere beskæftigelse med "trinvis beskrivelser" i forbindelse med mere komplicerede algoritmer.

I forbindelse med arbejdet med algoritmer bør man være opmærksom på de problemer, som kan være knyttet til selve udformningen af algoritmen. Tænk fx på, hvordan kravet til talforståelsen ændres, når opstillingen i et simpelt regnestykke forandres fra vandret til lodret opstilling:

$$43 + 6 = \begin{array}{r} \\ +6 \\ \hline \end{array} 43$$

I den første opstilling skal eleven overveje, om "6" skal parres med "3 enere" eller med "4 tiere", mens man i den anden opstilling helt kan udelade denne overvejelse. Naturligvis kan man sige, at denne opstilling er praktisk, men det fremmer næppe talforståelsen af starte med at indlære denne algoritme.

Ser man isoleret på arbejdet med træningsopgaver i udregninger inden for de fire regningsarter, har dette normalt ikke haft til formål at give eleverne indsigt i algebraen. Arbejdet har alene sigtet mod at give eleverne sikkerhed i det, som maskinerne nu kan klare. Der bør derfor foretages en nyvurdering af arbejdet med beregningsmetoder i retning af at lade talforståelsen og indsigten i algebraen indgå med større vægt og i et samspil.

Erfaringerne fra undervisningen viser, at eleverne med blot en simpel regnemaskine til rådighed i højere grad end tidligere kan arbejde med virkelighedens talstørrelser. Dette er i sig selv en stor gevinst for elevernes motivation i undervisningen og for deres oplevelse og erkendelse af den rolle, matematikken spiller i samfundet.

Set i relation til tankerne bag enhedsskolen er det en ny pædagogisk mulighed, som maskinerne tilbyder for undervisningen i matematik.

Hertil kommer, at eleverne kan koncentrere deres opmærksomhed mod mere generelle algebraiske spørgsmål som fx: "Skal jeg dividere eller trække fra i denne situation?" eller "I hvilken rækkefølge skal denne udregning foretages: $23 - 3 \times 4$?"



**Billedet er ikke medtaget
på grund af
ophavsret**

Viggo Hartz

Multiplikation - algebra og beregningsmetode

En gruppe elever i 4. klasse er ved at finde vandforbruget i en familie, der består af 4 personer. Herunder er de gået i gang med at undersøge, hvilken betydning det får, hvis familien køber et "spare-toilet". De er stødt på det problem, at de skal beregne forbruget til wc-skylning i en uge, når de har sat forbruget til 240 liter i døgnet.

Valg af regningsart bliver det første, de skal bestemme sig for. En elev vælger addition og de andre multiplikation. Ved hjælp af lommeregneren finder de frem til, at forbruget bliver 1680 liter.

Læreren vælger på et tidspunkt at tale med hele klassen om problemet. Specielt tales om, hvordan man uden brug af lommeregner kan beregne vandforbruget. En elev foreslår først, at man kan regne med ca.-tal og sige, at 7×200 er 1400. Man drøfter, om dette er tilstrækkeligt i situationen, hvad det sikkert er, når alle andre usikkerheder tages i betragtning.

Uden at præsentere en beregningsmetode beder læreren elever om at finde det præcise resultat af multiplikationen 7×240 . Det resulterer bl. a. i disse notater på elevernes papirer:



Ved at analysere metoderne kan man se, hvordan eleverne har benyttet forskellige algebraiske regler. Man kan med eleverne tale om dem for at få sammenhæng over til den sædvanlige brug af algebraiske notationsformer. Samtidig kan de forskellige opstillinger drøftes med henblik på en udvikling af hensigtsmæssige metoder. Eksempelvis er det let at blive enige om, at den lodrette opstilling af på hinanden følgende addender vil blive uhensigtsmæssig, hvis der er tale om 52×240 . Fælles for drøftelserne er at betragte hver opgave som et lille problem, der skal løses ud fra kendte regler. Senere kan mere formelle betragtninger komme på tale. Fx at

$$7 \times 240 = 7 \times (200 + 40)$$

Det er tydeligt, at der ikke tidligere i klassen har været undervist i brugen af en bestemt beregningsmetode, så det må formodes, at eleven, der har benyttet en af de sædvanlige korte algoritmer har lært den andet steds. En samtale med eleven vil afsløre, om den algebraiske side af metoden er forstået.

Målet for undervisningen er, at eleverne får mulighed for at deltage i en proces, hvor de kan udvikle metoder, så udregningen gøres lettere. I processen arbejder de samtidig med generelle regler for regning med tal. Regler som senere spiller en rolle i et mere formelt arbejde med algebra.

På afsluttende trin kan eleverne, hvis det ønskes, hurtigt tilegne sig en bestemt beregningsmetode fx for multiplikation. Det forudsætter blot, at de har den fornødne elementære talfærdighed.

Det specielle og det generelle

Tal benyttes i så mange sammenhænge, at det vil være umuligt for eleverne at komme til at beskæftige sig med alle. I undervisningen må man derfor foretage valg, som er eksemplariske både med hensyn til fagligt indhold og metode.

Se fx på en avisnotits som denne:

```
"Landsstævnets 40 000 idrætsfolk får  
ved indmarchen hver 0,2 m2 at stå på".
```

Eleverne har i deres skoletid næppe nogen sinde arbejdet med tallene 40 000 og 0,2 i en lignende sammenhæng. Alligevel forventer vi, at de kan benytte deres talforståelse og arbejdsmetoder i en sådan ny situation.

De skal som deltagere i stævnet kunne gøre sig overvejelser over, hvor megen plads de egentlig får til rådighed. Planlæggerne af stævnet skal kunne foretage beregninger over, om der er plads nok til alle, altså kunne anvende matematikken til at forudsige en situation. I alle tilfælde skal de selv vælge, hvordan de ud fra deres interesse skal håndtere tallene.

Dette betyder for undervisningen, at man skal sigte mod, at eleverne får mulighed for at erkende de generelle sammenhænge, som gælder for de mange specielle tilfælde. I det omtalte eksempel er det selvfølgelig en fordel at vide, at 0,2 er det samme som $\frac{1}{5}$, hvis vel at mærke $\frac{1}{5}$ m² giver en bedre forståelse af, hvor megen plads der er til rådighed. Større almen værdi har imidlertid en indsigt i, at alle decimaltal kan omskrives til brøktal.

Arbejdet med tal og algebra kan i mange situationer støttes ved at benytte forskellige repræsentationsformer. Fx kan multiplikationen 6×17 repræsenteres geometrisk ved et rektangel, opbygget af 6 kvadrater langs den ene kant og 17 kvadrater langs den anden.

En anden mulighed vil være at bygge videre på den grundlæggende definition af multiplikation som en addition:

$$6 \times 17 = \\ 17 + 17 + 17 + 17 + 17 + 17$$

Her mister man imidlertid det visuelle, det geometriske, som for mange elever udgør en væsentlig forklaringsmodel, også når det drejer sig om algebraiske forhold.

Set i en kulturel sammenhæng gav indførelsen af koordinatsystemet anledning til at knytte forbindelse mellem tal og geometri. Også i undervisningen har det vist sig, at denne sammenknytning har stor værdi for elevernes forståelse af matematikken.

En fremstilling af 6-tabellen som en grafisk afbildning af $y = 6x$ i et koordinatsystem vil således kunne give ny indsigt. Herefter kan yderligere undersøgelser gennemføres ved at tegne grafer for $y = 7x$, $y = 10x$, osv. Der kan drages konklusioner på grundlag af sammenligninger. I dette arbejde får benyttelsen af variable en naturlig plads.

Går man videre fra multiplikationen 6×17 til at betragte multiplikationen $6 \times 0,7$ kan eleverne igen bygge på den grundlæggende forståelse af multiplikation som gentagen addition eller på en geometrisk repræsentation:



Men eleverne kan ikke bygge på tidligere erfaringer om, at "når man ganger, får man et større tal som resultat". For mange elever vil det i første omgang være usandsynligt, at 6 gange noget kan blive mindre end 6. Dette er en fare ved at opbygge talarbejdet på generaliseringer, der kun gælder inden for et bestemt talområde. Det svarer til, at eleverne generaliserer og siger, at "man ganger et tal med 10 ved at sætte et nul efter tallet". Ved 10×17 går det jo godt, mens det ved $10 \times 0,7$ går galt.

Er man i tvivl om, hvilke regler der gælder for en bestemt udregning, bør eleverne fra undervisningen have vænnet sig til at prøve at se nærmere på problemstillingen, så man ikke blot siger: Jeg kan ikke huske hvordan, jeg skal gøre. Eleverne skal opnå tillid til, at de altid kan bygge videre på deres egen grundlæggende forståelse.

Arbejde med formler og ligninger

I læseplanen står der, at eleverne i fællesskab formulerer regler for de erfaringer og den indsigt, de har opnået. Det kan fx betyde, at eleverne i syvende klasse gruppevis er nået frem til nedenstående formuleringer om, hvordan man finder arealet af en trekant.

Gruppe I:

- "Man kan gøre trekanten til en rektangel og måle dens areal og halvere den."

Gruppe II:

- "Ved at tegne rektangel rundt om trekanten og finde halvdelen af rektanglet."

Gruppe III:

- "Længden gange bredden og : med to.
Det går ikke med en skæv trekant, men hvis man deler trekanten over på midten, sådan at det bliver to rette vinkler, så kan man."

Klassen kan herefter i fællesskab drøfte formuleringerne og derigennem skærpe opmærksomheden om, hvordan man udtrykker sig.

Man kan tale om, hvordan en formel som $T = h \times g : 2$ kan læses, og at den angiver en algebraisk beskrivelse af, hvordan man finder arealet T af en trekant med højde h og grundlinje g . Senere kan man gøre overvejelser over, hvorfor det er særlig vigtigt at beskæftige sig med arealet af trekanter.

Et andet eksempel på, hvorledes elever kan arbejde med at opstille formler af mindre kendt karakter, kunne være dette:

Elever er ved at overveje størrelsen af den samlede overflade, når centicubes samles til en række.

**Billedet er ikke medtaget
på grund af
ophavsret**

Så langt kan eleverne løse problemet uden at gøre andet end at tælle flader (sidefladen på en centicube er netop 1 cm²). Hvad nu, hvis rækken af centicubes bliver 20 centicubes? 200 centicubes?

Der kan stadig tælles. Men eleverne kan også indse, at tilvæksten i arealet for hver centicube, som sættes på rækken, er 4. Derved kan der skabes mulighed for en beregning.

To grupper var kommet lidt længere. De havde fået nedskrevet følgende ikke ens overvejelser (læreren havde undervejs været part i drøftelserne):

den ene gruppe	den anden gruppe
1 centicube 1×6	6 (senere 1×4+2)
2 centicubes 2×6-2	2×4+2
3 centicubes 3×6-2×2	3×4+2
4 centicubes 4×6-3×2	4×4+2
5 centicubes 5×6-4×2	5×4+2
.....	
n centicubes n×6-(n-1)×2	n×4+2

En drøftelse mellem de to grupper rejste problemet: Kan vi have ret i begge tilfælde? Formuleret på en anden måde er det et spørgsmål om sandheden af følgende ligning:

$$n \times 6 - (n - 1) \times 2 = n \times 4 + 2$$

Netop de elever, som havde magtet den foregående overvejelse, var også i stand til at omregne venstre side, så den fik samme form som højre side.

I den samlede klasse får en sådan drøftelse en anden karakter. For en del elever er der tale om ganske krævende overvejelser, hvor det højst opnåelige kan være, at eleverne kan følge med i lærerens eller en elevs redegørelse for "opdagelsen". Betydningen af drøftelsen kan ligge i, at eleverne får indsigt i, hvorledes en anden elevgruppe har arbejdet med problemet.

Et andet eksempel på, hvordan eleverne kan arbejde med at skabe sig personlig viden i arbejdet med formler og ligninger kunne være følgende, hentet fra en 8. klasse:

Eleverne har i de foregående år arbejdet med anvendelse af variable i mange sammenhænge, hvor der har været vekslet mellem beskrivelser i ord og ved hjælp af symboler, fx sammensat til ligninger.

Erfaringer viser, at der er et stort spring at foretage for eleverne, når de skal til at håndtere algebraiske udtryk i form af ligninger. Det generer eleverne, at de oplever, at der ikke er en bestemt metode, der altid er den mest hensigtsmæssige at benytte.

Efter en generel indledende samtale om ligninger blev der taget hul på det mere tekniske arbejde med løsning af ligninger. Eleverne gik uden nærmere angivelser af metoder i gang med selvstændigt at løse ligninger af forskellige typer, som antydte i dette uddrag:



I løbet af en lektion løste eleverne mellem 10 og 26 opgaver.

Metoderne, der blev anvendt var vidt forskellige. Men typisk blev ligningerne løst "baglæns".

eks. $5X - 2 = 8$
Hvis $(5x - 2)$ skal være 8,
så skal $5x$ være 10.

Det kunne skrives sådan: $5X = 10$

Hvis man så iøvrigt var klar over, at $5X$ var det samme som $5 * X$, så var det let at se, at løsningen var: $X = 2$

I nogle opgaver skulle der reduceres først. Men så kunne også de løses ved overvejelser og tilbagegående regning.

Selv opgaver af denne type kunne klares:

$$17y + 8 - 2y = 30 + 4y$$

Først blev der reduceret:

$$15y + 8 = 30 + 4y$$

Herefter blev der ræsonneret til, fx at $15y$ og $4y$ på hver sin side af " $=$ " måtte kunne reduceres til:

$$11y + 8 = 30$$

Hvorefter typen lignede de foregående.

Ved at bygge på forhåndskendskabet til variabelbegreb og regneregler kom eleverne langt i det tekniske arbejde med løsning af ligninger. Da de ikke havde fået præsenteret en bestemt metode, var de nødsaget til at se på den samlede symbolsammenstilling, benytte ræsonnementer, fejle og prøve igen. Dette skal ses i modsætning til et forløb, hvor nogle ligningsløsningsregler bliver præsenteret - "lægge lige meget til på begge sider af lighedstegnet", "flytte over på den anden side af lighedstegnet" mv.

Ved den benyttede fremgangsmåde er eleverne selv med til at finde frem til metoder og regler. De er med til at opbygge deres matematiske kunnen og viden, og de får en grundlæggende metode at vende tilbage til.

Nogle elever kan med fordel fortsætte med at benytte inspektionsmetoden, hvor de "gætter" på et tal, som indsættes for den variable: Herefter regnes udtrykket ud for at se, om tallet er en løsning. Er tallet ikke en løsning, fortsættes med nye "gæt" og efterprøvninger, indtil et resultat er nået.

På et senere tidspunkt må elever og lærer drøfte betydningen af at kunne løse ligninger efter de sædvanligt anvendte metoder. Der må tages stilling til, hvilke færdigheder i ligningsløsning, de forskellige elever har behov for at tilegne sig.

Herunder må også grafiske metoder i koordinatsystemet inddrages. Fx kan løsning af ligningssystemet bestemmes ved at tegne grafiske billeder og aflæse skæringspunktets koordinater. Eksperimenterende arbejde med edb-programmer til tegning af grafer kan også give indsigt i ligningsbegrebet.

Tal som en del af kulturen

Når der i fagets formål står, at undervisningen skal bidrage til, at eleverne oplever og erkender matematikkens rolle set i en kulturel og samfundsmæssig sammenhæng, skal dette opfattes bredere end et "teknisk" anliggende.

Som eksempel på en problemstilling, som har et matematikfagligt udgangspunkt, men som hurtigt fører til iagttagelser af både kunstnerisk og naturfaglig karakter, kan Fibonacci-talrækken nævnes. Talrækken:

1, 1, 2, 3, 5, 8,

vækker for mange elever umiddelbart nysgerrighed.

Er det næste tal i rækken mon 13?

Hvis ja, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,...

hvorfor er det ottende tal i rækken så ikke nødvendigvis 21?

Gennem studiet af denne overskuelige symbolsammenstilling kan man nu komme til at tale om, at selv om der i opstillingen af talrækkens første syv tal er indbygget et system, så fortsætter dette ikke nødvendigvis.

Eleverne kan selv fortsætte legen: Hvad sker der, hvis de to første tal i rækken hedder 0, 1,...? Undersøgelse af forholdet mellem to på hinanden følgende tal, fx 3 : 5, og sammenligning med 5 : 8 og andre efterfølgende forhold, kan give anledning til nye overvejelser.

Et andet aspekt - modelbegrebet - kan inddrages specielt i forbindelse med Fibonaccitalle. Det har vist sig, at "frøene" i solsikker, kogler, ananasfrugter m.fl. sidder i spiraler, der snor sig enten til venstre eller til højre, og at antallet af sådanne spiraler tilsyneladende altid rammer et tal i Fibonaccirækken.

Det er naturligvis ikke teknikken i at udregne Fibonaccirækkens tal, der er det væsentlige, eller at antallet af frøspiraler er et Fibonaccital. Det væsentlige er, at eleverne får mulighed for at opleve, hvorledes der kan arbejdes med matematik.

I dette tilfælde fører den "rene" matematik til en model, der svarer til forhold i omgivelserne, i andre tilfælde dyrkes legen med matematikken alene for dens egen skyld.

Matematik i anvendelse

Det har altid været en begrundelse for undervisningen i faget, at den praktiske anvendelse har haft en fremtrædende plads. Tekstopgaver, hvor der blev benyttet et særligt regnesprog, var den typiske form, hvorunder anvendelsen blev præsenteret.



**Billedet er ikke medtaget
på grund af
ophavsret**

I dag taler vi om matematik i anvendelse, når et problem - større eller mindre og ofte af en vis åben karakter - behandles ved at inddrage begreber og metoder fra matematikken. I denne behandling kan indgå et samarbejde mellem flere fag for at få problemstillingen belyst bedst muligt. I den første del af skoleforløbet vil det fx i mange tilfælde være naturligt, at natur/teknik og matematik knyttes tæt sammen.

Viggo Hartz

Anvendelsen af matematikken har gradvist skiftet karakter. Det hænger sammen med, at det at udføre beregninger - ud over hvad man kan klare i hovedet - næsten helt er overtaget af lommeregner og computer.

Kassedamen har fx ikke behov for i sit arbejde selv at udføre beregninger. Hele afregningsprocessen kan gennemføres uden anden direkte anvendelse af tal end indtastning af nogle få cifre. Det samme gælder for medarbejdere ved en lang række andre erhverv.

På den anden side benytter samfundet sig i stigende grad af matematikken. Mange beslutningsprocesser baseres på matematisk behandling af foreliggende oplysninger. I tilgift er denne anvendelse af matematik ofte mere eller mindre skjult. Det stiller i et samfund, der bygger på demokrati, store krav til borgernes viden om, hvordan matematik kan indgå i sådanne sammenhænge.

Dette dilemma mellem en tilsyneladende afmatematisering af daglige processer og samfundets voksende brug af matematik rummer en særlig udfordring til matematikundervisningen. Eleverne skal, selv om de oplever et mindre dagligt behov for matematik, arbejde mere med de mindre synlige anvendelser af faget.

Beskæftigelsen med matematikkens anvendelsesside retter opmærksomheden på flere faglig-pædagogiske problemstillinger, som i nogen grad er modstridende. Der er fx ikke tvivl om, at arbejde med praktiske problemer i undervisningen virker motiverende på eleverne og indeholder en række pædagogiske muligheder med hensyn til valg af aktiviteter.

Uanset at fagets anvendelsesside virker motiverende på eleverne, må man som lærer samtidig være opmærksom på, at der derved opstår et dobbeltsidigt problem: Først skal eleverne sætte sig

ind i og forstå selve den praktiske problemstilling, dernæst skal de kunne opstille en matematisk beskrivelse af problemet. Læreren må samtidig være meget opmærksom på, at hvis eleverne skal opnå større kompetence i arbejdet med praktiske problemer, skal deres faglige indsigt hele tiden udbygges.

Beskrivelse ved hjælp af matematik

Forhold, der vedrører menneskeliv, natur og samfund, beskrives ofte ved hjælp af matematik. Det sker, hvad enten det er en kvantitativ beskrivelse, eller det handler om at beskrive forhold ved hjælp af tegning.

Den matematiske beskrivelse kan have forskellig karakter. Der kan være tale om, at faktiske forhold bliver fuldt ud beskrevet, at faktiske forhold bliver beskrevet ved hjælp af stikprøver, eller at en udvikling over en periode bliver beskrevet og fremtidige forhold bliver forudsagt.

I flere af disse beskrivelsesformer indgår der overvejelser om sandsynlighed, baseret på statistik. Statistisk sandsynlighed har en stigende anvendelse i den matematiske beskrivelse.

I undervisningen kan behandlingen af selv store datamængder blive overkommelig med de foreliggende datatekniske muligheder. Vægten kan derfor lægges på spørgsmål om at fremskaffe data, herunder elevernes egen indsamling af data i nogle situationer, samt at overveje anvendeligheden af bestemte data. På samme måde er det vigtigt, at man i undervisningen tillægger det stor vægt at arbejde med en kritisk forholden sig til de opnåede resultater. Herved kan eleverne opbygge et beredskab, som er brugbart i andre lignende situationer.

For de ældste elever vil der i mange sammenhænge være centrale samfundsspørgsmål at beskæftige sig med. I både den trykte og den elektroniske nyhedsformidling inddrages til stadighed argumentation, som benytter matematikkens sprog: tabeller, kurver, beregninger og tegninger. Det gøres ofte, uden at denne side af argumentationen problematiseres. Ikke sjældent benyttes matematikken som sandhedsvidne.



Viggo Hartz

Selv om den anvendte matematik ofte ligger ud over, hvad eleverne umiddelbart forstår eller har tid til at arbejde dybere med, så må det være en opgave at finde ud af, om fx en ukendt formel kan analyseres, så man kan få indtryk af, på hvilken måde de forskellige indgående størrelser indvirker på beregningsresultatet.

Udvalgte emner og problemstillinger

I det følgende gives eksempler på emner og problemstillinger, hvor matematikken er i anvendelse i undervisningen.

Boligforhold

Allerede tidligt i skoleforløbet kan forhold omkring boligen indgå som et emne i undervisningen. Det er en almen erfaring, at eleverne er meget motiverede for at behandle problemstillinger, som tager udgangspunkt i deres egne boligforhold.

**Billedet er ikke medtaget
på grund af
ophavsret**

Hvis eleverne senere i skoleforløbet skal danne sig indtryk af, hvorfor vi bor, som vi gør, kan der blive anledning til at undersøge, hvordan vi faktisk bor i by, på land, i Danmark eller uden for Danmark. Der kan give anledning til at se på spørgsmål om hensigtsmæssig boligindretning - evt. sat i relation til traditioner herfor - og om økonomiens betydning. I forsøget på at beskrive og udvikle boliger, vil der blive behov for at arbejde med tegning og beregning af areal og rumfang, ligesom der kan foretages overvejelser over økonomiske konsekvenser.

Viggo Hartz På de ældste klassetrin kan man lægge energibetragtninger ind i opgaven, og der bliver herved behov for at forstå og anvende fysikkens formler til beregningen eller selv udvikle formler.

Emnet kan udvikles, så det inddrager design og arkitektur både med hensyn til brugsredskaber, møbler, bolig og byplan - områder, som kan understøtte geometri eller bruge geometri.

Trafik

De små elever kan arbejde med trafikskiltes form og måske forsøge at lave en miniudgave af skolens nære vejnet i skolegården. Eller de kan arbejde med skiltene betydning for derved at komme til at beskæftige sig med de symboler, der indgår i beskrivelsen af forskellige fænomener i trafikbilledet.

De større elever kan beskæftige sig med emnet trafiksikkerhed. De kan selv foretage undersøgelser eller lære at forstå og fortolke undersøgelser foretaget af officielle organer eller interessegrupper. Hvordan ville eleverne tilrettelægge den offentlige trafik i deres kommune, set ud fra deres egne interesser eller ud fra et sikkerhedsmæssigt synspunkt?

De ældste elever vil kunne overveje generelle trafikforhold: Bygning af broer og motorveje set under økonomiske eller økologiske synsvinkler. Forholdet mellem kollektiv og individuel trafik kan inddrages.

I alle disse spørgsmål vil det være undervisningens opgave at se på de kvantitative sider i forhold til de kvalitative sider.

Naturen

I mange af de emner, der gennem hele skoleforløbet kan hentes fra forhold i naturen, findes der oplagte muligheder for at inddrage matematik. Hele dette emneområde kan faktisk karakteriseres ved at have matematik som hjælpedisciplin.

Emner fra naturområdet vil i særlig grad være anvendelige i forbindelse med opbygningen af det størrelsesbegreb, som står centralt i matematikundervisningen. I hele forløbet kan eleverne gennem arbejdet med sådanne emner skabe en grundlæggende forståelse og finde begrundelser for, at de må udvikle, beskrive og definere særlige størrelsesbeskrivelser for så forskellige begreber som længde, flade, rum, vinkel, masse og temperatur - og i den senere del af skoleforløbet - arbejde, kraft, energi, fart og acceleration. For alle disse begreber spiller tallene en afgørende rolle, og ofte vil anledningen til at udvide talområdet findes gennem arbejdet med sådanne områder, hvad enten det handler om geografi, biologi eller fysik/kemi. Gennem dette arbejde kan også opstå behov for at anvende variable, formler, ligninger og funktioner.



**Billedet er ikke medtaget
på grund af
ophavsret**

Viggo Hartz

Hvis yngre elever skal undersøge vækstbetingelserne for plantefrø ved at give dem forskellige vækstbetingelser, vil matematikken være én af mulighederne, når resultaterne af forsøget skal beskrives. Eleverne kan høste planterne og sammenligne deres længde, men ønsker de ikke at plukke de flotte blomster, så kan de overføre længden til papir ved hjælp af en snor eller direkte måle og beskrive ved tal. Nu vil næppe alle planter med samme vækstbetingelser blive lige lange, hvorved eleverne kan blive nødt til at opfinde noget, der svarer til gennemsnit for at foretage sammenligninger.

Arbejdet med størrelsesforhold får en mere kompleks karakter for de større elever, som i geografi arbejder med at forstå de forskellige former for kort og deres tilblivelse. De kan gennem eksperimenter være med til at udvikle den matematik, som anvendes hertil. Det gælder lige fra enkle forsøg på at beskrive skolens grundplan til forsøg på at forstå, hvorledes man på forskellige måder kan gengive den kugleformede jordklode tegnet som sider i et atlas. Andre faglige begreber end størrelse må her bringes i anvendelse.

Samspelet mellem faget, fagets anvendelse og organiseringen af undervisningen

Området "matematik i anvendelse" kan siges at være en dialog mellem fagets teoretiske opbygning og den praktiske virkelighed. Det kan imidlertid være meget stor forskel på den vægt, som henholdsvis faglig teori og praktisk anvendelse har i forskellige undervisningsforløb.

I mindst i forbindelse med arbejdet med tværgående emner og problemstillinger kan det være nyttigt for matematiklæreren at klargøre sig, med hvilken vægtning mellem teori og anvendelse, matematikken indgår i et sådant forløb.

Nedenfor beskrives fem undervisningssituationer, som repræsenterer forskellige grader af anvendelsessiden af faget - helt ud til den situation, som slet ikke direkte inddrager fagets anvendelse.

Der er ikke tale om nogen rangordning af beskrivelserne. I det daglige arbejde i undervisningen vil det ofte være sådan, at det ikke klart kan afgøres, inden for hvilken beskrivelse undervisningen gennemføres. Det vil også kunne forekomme, at en undervisning starter som én type for så at bevæge sig over i en anden.

- Den problemstilling eller det emne, som man ønsker at undersøge og belyse er af almen karakter, dvs ikke bestemt af faget matematik. Matematik vil i et sådant tilfælde blive inddrager, når den kan bidrage til at give indsigt i emnet. Eleverne kan vælge at inddrage eller at udelade matematik, men det er som i al anden undervisning lærerens opgave at vurdere kvaliteten af arbejdet. Denne undervisning har ofte karakter af projektarbejde. Kvaliteten ligger i, om matematikken er vel anvendt, og om den er anvendt, hvor den burde være det.

- Et udvalgt område ønskes belyst bl.a. ved hjælp af matematik. Det kan være et særligt samfundsforhold, et naturvidenskabeligt forhold, et økonomisk forhold eller et kulturforhold. Området kan være valgt af læreren, fordi særlige sider af matematikken er særligt oplagte at inddrage i behandlingen af netop dette emne. Arbejdet med emnet og med matematikken har ligeværdige hensigter. Kvaliteten i arbejdet er derfor til stede, hvis eleven forøger sin viden og kunnen inden for både fag og emne.
- Et matematikfagligt emne søges belyst. Arbejdet med faget er den centrale hensigt, og kun de sider af praksis, som belyser den matematikfaglige hensigt, inddrages. Emnet kan fx være vækstfunktionen. Biologiske sammenhænge kan være valgt til eksemplificering, men de biologiske forhold berøres kun i det omfang, de støtter matematikken. Kvaliteten bedømmes i overvejende grad ud fra den opnåede matematikfaglige indsigt.
- Udgangspunktet er at behandle rene matematikfaglige emner som eksempelvis subtraktion, vinkler eller sandsynlighedsbegrebet. Anvendelsessiden benyttes, fx i form af tekstopgaver, udelukkende til illustration af det faglige emne. Dette kan være en støtte for elevens tankegang. Men ofte vil eleven glemme anvendelsen og søge at trække oplysningerne - ofte tallene - ud af sammenhængen og udføre de forventede regneoperationer eller tegne de krævede diagrammer. Kvaliteten vil blive bedømt på rigtigheden af talresultatet eller tegningen. Refleksioner i forhold til anvendelsessiden vil sjældent være meningsfulde.
- Fagets anvendelse er helt udeladt. Hensigten er alene at udvikle forhold, som vedrører matematikken. Også ren træning af matematiske færdigheder kan indgå. Indirekte kan eleverne dog gennem den samlede undervisning have opnået forståelse for, at man må arbejde med at lære at beherske nye faglige områder for at blive bedre til at benytte matematik til løsning af praktiske problemer. Kvaliteten kan vedrøre alle faglige aspekter: kundskaber, færdigheder, arbejdsmetoder og udtryksformer.

Om arbejde med matematiske modeller

Når man ser på anvendelse af matematik, er modelbegrebet centralt. Modeller er vigtige hjælpemidler til at beskrive problemstillinger og til at forudsige, hvordan de faktuelle forhold i en given situation kan udvikle sig.

For yngre elever vil kendskabet til modelbegrebet kunne opbygges på intuitive erfaringer fra lege med dukkehuse, modeltog osv. Også tegninger af omgivelserne kan bidrage til disse erfaringer.

Når elever på mellemtrinnet fx bygger en model af Keopspyramiden, vil modellen kunne give en række oplysninger om pyramiden. Højden kan med tilnærmelse bestemmes ved måling. Man kan undersøge skyggen af pyramiden ved forskellige solhøjder. Nøjagtigheden af de fundne resultater kan drøftes som led i forståelsen af modellers begrænsning. Mindst lige så vigtig er det at tale om, hvilke oplysninger om pyramiden, der forsvinder, når man kun arbejder med modellen.



**Billedet er ikke medtaget
på grund af
ophavsret**

At arbejde med modeller i skolens matematikundervisning er ikke noget nyt. Eleverne har allerede på begyndertrinnet benyttet udtryk som " $2 + 4$ " som model for mange af virkelighedens foreteelser, og sikkert uden at der i undervisningen har været tale om, at der her blev benyttet en enkel matematisk model.

Viggo Hartz

Mange dagligdags beregninger bygger på anvendelse af en matematisk model, der kan udtrykkes ved denne funktion:

$$y = a \times x.$$

I den indledende undervisning er modellen måske blot omtalt som: "dobbeltså meget af det ene betyder dobbeltså meget af det andet". Senere kan sammenhængen mere alment være omtalt som "en ligefrem proportionalitet". Eksempelvis vil kursgrafer, tegnet i et koordinatsystem, kunne give en god anledning til at tale om begrebet matematiske modeller.

Det er imidlertid ret sjældent, at virkelige forhold kan beskrives præcist ved en ligefrem proportionalitet eller for den sags skyld ved en anden simpel matematisk funktion. Har man eksempelvis fået en sammenhæng beskrevet ved en række punkter, der "næsten" ligger på en ret linje gennem $(0,0)$ i et koordinatsystem, vil man stå over for et valg. Man må overveje, om man vil lade sammenhængen beskrive ved den matematiske model $y = ax$ for lettere at kunne håndtere beskrivelsen. Den forenkling, der sker ved et sådant valg, må herefter medtænkes og drøftes, når modellen anvendes i praksis.

Når man opstiller en model for en situation fra virkeligheden, foretager man næsten altid en forenkling. Virkeligheden er så rig på detaljer, at man umuligt kan lade modellen gengive dem alle. Ofte er det netop denne forenkling, der gør modellen til et nyttigt værktøj. Ved hjælp af modellen får man overblik over de forhold, der synes afgørende i den aktuelle situation. I mange tilfælde vil man kunne opnå et indblik i sammenhænge, som det vil være svært at få i virkelighedens vrimmel af detaljer.

I forenklingen ligger imidlertid også en fare. Modellen kan gengive virkeligheden i en så forenklet form, at for mange betydende faktorer er forsvundet. Det kan derfor være en særdeles krævende opgave at opstille en god model, dvs. en model som på passende måde afspejler virkeligheden.

Hertil kommer, at modellen ofte vil være farvet af holdninger hos dem, der har opstillet den. En model vil således i mange tilfælde gengive virkeligheden, som modelbyggerne ser den, og forskellige modelbyggere kan komme til vidt forskellige resultater. Eksempler herpå har man i de modeller, der fra forskelligt hold opstilles til brug for overvejelser over den økonomiske udvikling i samfundet.

Matematiske modeller og edb

Et eksempel på en matematisk model, der kan anvendes i undervisningen på de ældste trin kan være en model til beskrivelse af befolkningstallet i Danmark over en nærmere fastsat tidsperiode.

Eleverne kan efter indledende drøftelser af, hvilke faktorer, der påvirker befolkningstallet være med til at opstille følgende model:

$$\begin{aligned} \text{befolkningstallet} = & \\ & \text{befolkningstal i året før} \\ & + (\text{fødte} - \text{døde}) \\ & + (\text{indvandrede} - \text{udvandrede}) \end{aligned}$$

Modellen kan herefter benyttes til en trinvis fremskrivning af befolkningstallet år for år. Selve beregningsdelen kan udføres ved hjælp af regneark eller mere specifikke edb-programmer.

Der vil også være konkrete ting at drøfte, når modellen skal anvendes. Fx vil antal fødte i fremtiden skulle fastsættes på grundlag af de seneste års fødselshyppighed. På tilsvarende måde må der for de andre variable i modellen træffes nogle valg.

Man kan vælge at forenkke modellen yderligere ved at lade befolkningstallet vokse med en bestemt årlig sats på fx 1%. Modellen vil da se således ud:

$$\begin{aligned} \text{befolkningstallet} = & \\ & \text{befolkningen i året før} \\ & + 0,01 \times \text{befolkningstallet i året før} \end{aligned}$$

Denne model er så simpel, at eleverne selv vil kunne håndtere den ved hjælp af notater og en lommeregner eller med et passende edb-program.

I sædvanlig notation kan modellen se sådan ud:

$$b_n = b_0 \times (1 + r)^n$$

Her er det det trinvis, det dynamiske, ændret til en stationær beskrivelse. Denne form vil for nogle elever være vanskeligere at håndtere end den at få muligheden for at følge ændringerne i befolkningstallet år for år.

Den trinvis beskrivelse vil desuden være en naturlig opfølgning af arbejder på mellemtrinnet med skrivemåder, hvor det visuelle benyttes til at fremme indsigten:



En pædagogisk fordel ved sådanne skrivemåder er, at de også fremmer indsigten i, hvordan man kan regne baglæns fra et sluttal til et begyndelsestal. Man skal nemlig blot gå baglæns og trin for trin udføre de modsatte operationer.

Normalt opfattes det som en mere tilgængelig proces at regne fremad end at regne baglæns. Der er derfor et andet pædagogisk aspekt at være opmærksom på ved valg af notations- og beregningsmetode. Elever med forståelse for de trinvis fremskrivninger kan benytte et edb-program til at eksperimentere sig til, hvilket begyndelsestal der ved fremadregningerne rammer sluttallet bedst muligt.

Den først opstillede matematiske model kan man vælge at udføre på en computer som en edb-model, der er fremstillet af andre. Eleverne kan eksperimentere med modellen, og da de har et førstehåndskendskab til modellens opbygning, kan de bedre tage kritisk stilling til de resultater, modellen viser ved forskellige valg for de variable.

Med computeren og relevante programmer til rådighed får eleverne nye muligheder for at se matematikken som et middel til beskrivelse af den praktiske virkelighed. Elevernes individuelle nysgerrighed og deres lyst til at afprøve nye ideer kan herigennem udvikles. De kan vove sig ind på ukendte områder og blive aktive brugere af matematik. De kan blive både opgavestillere og opgaveløser.

Geometri

Når et barn i skolestarten prøver at tegne et hus, er det barnets forestillinger om hus, der bliver synlige på papiret. Selv om hånden er usikker og stregerne bugter sig, er det tydeligt, at eleven forsøger at beskrive en form. Til at begynde med er det blot en firkant med døre og vinduer, som også er firkanter. Senere prøver eleven at tegne to sider af huset på tegningen - forside og gavl. Forside og gavl er tegnet som én flade. Det bekymrer ikke barnet. Døre og vinduer søges omhyggeligt tegnet ind og derefter følger ofte en kamp med en skorsten.



**Billedet er ikke medtaget
på grund af
ophavsret**

Viggo Hartz

Form, størrelse og beliggenhed spiller ved tegningen en rolle for barnet. Og som følge af barnets mere og mere opmærksomme observationer og dets voksende evne til at gøre sig forestillinger, gennemgår børnetegningen en udvikling. Intuitivt dannes begreber om parallelitet, vinkler mv.

Ved at iagttage børnetegningen kan matematiklæreren få information om barnets geometriske formåen. På samme måde som læreren i billedkunst vil matematiklæreren prøve at udvikle barnets tegnede udtryk, og mange af de begreber, som benyttes i de to fag, vil være nært beslægtede. Det drejer sig om begreber som form, størrelse, lighed, beliggenhed, ved siden af, ovenover, foran og imellem. I matematik kan arbejdet med geometriske begreber og tænkning forbindes såvel til forsøg på at gengive ved tegning, som til at arbejde med modeller, brikker eller sømbræt.

Arbejde med geometriske modeller

Det er et grundlæggende træk ved den vejledende læseplan, at geometrien tager udgangspunkt i elevens forestillinger om og beskrivelse af den omgivende verden. Herved kan arbejdet med geometrien - på samme måde som arbejdet med tallene - tage udgangspunkt i børnenes hverdagserfaringer.

Indholdet i geometriundervisningen er beskrevet som et samspil mellem beskæftigelsen med konkrete dagligdags ting, arbejdet med den geometriske beskrivelse heraf i form af tegninger, samt overvejelser om sammenhængen mellem tingen og den tegnede gengivelse heraf.

I de første år arbejdes der med fysiske objekter, som gøres til genstand for manipulation, iagttagelse og drøftelse. Erfaringerne med de geometriske former og figurers størrelse kan med fordel underbygges ved at lade eleverne bygge rumlige modeller og lave figurer på et sømbræt. Det kan være figurer, der ligner et eller andet, eller det kan være figurer, som skal opfylde bestemte betingelser: Kan du lave en firkant, som er dobbelt så stor som denne her? Herved kan eleverne opdage, at "dobbelt så stor" kan have flere betydninger: Dobbelt så lange sider eller dobbelt så stor en flade. Det er lærerens opgave at give eleverne mulighed for at opdage og indse sådanne forskelle. Herved kan eleverne indse behovet for at udtrykke sig mere præcist.



Viggo Hartz

Udviklingen af metoder til at tegne troværdige gengivelser af den omgivende verden vil være et gennemgående træk i hele skoleforløbet. Der er i læseplanen omtalt forskellige typer af geometrisk tegning. De vil hver for sig fremhæve visse træk ved den tegnede genstand. De kan derfor hver for sig betragtes som en model af virkeligheden. De forskellige typer skal kort karakteriseres i det følgende.

Arbejdstegning

Hvis man prøver at tegne en æske set fra alle sider, vil man få en tegning, som kan danne grundlag for at bygge æsken. En sådan udfoldning - en form for arbejdstegning - vil kun i ringe grad vise æskens virkelige udseende.



**Billedet er ikke medtaget
på grund af
ophavsret**

Man kan sige, at man ved denne form for anvendelse af matematiske egenskaber ved figuren har beskæftiget sig med den del af æsken, som er interessant ved en konstruktion. Her gennem skoleforløbet kan denne tegningstype udvikles, så eleverne får forudsætninger for at læse og forstå de mange arbejdstegninger, de vil støde på resten af deres liv.

Hvis dette arbejde kombineres med bygning af et færdigt objekt, vil eleven have mulighed for at udvikle sin forestillingsevne, så det færdige produkt kan ses alene ud fra arbejdstegningen.

Isometrisk tegning

I skolen vil en isometrisk tegning ofte være knyttet til særligt papir, hvor støttepunkter vil være tegnet.

For de yngste elever kan opgaven være med centicubes at bygge en figur, som den de har fået forelagt i en tegnet udgave. Der kan naturligvis være tale om forskellig grad af kompleksitet. Senere kan eleverne selv prøve at tegne noget, de har bygget med centicubes. Denne model for rumlig beskrivelse har den særlige egenskab, at man i nogen grad kan måle længden af en figur på tegningen, selv om man normalt ved rumlig gengivelse vil kunne se, at "linjer skrumper", når de på tegningen fører væk fra iagttageren.

**Billedet er ikke medtaget
på grund af
ophavsret**

Viggo Hartz

**Billedet er ikke medtaget
på grund af
ophavsret**

Isometri betyder "samme mål". Det målbare vil være de retninger, som er angivet ved prikker eller streger på det underliggende tegnepapir. Isometrisk tegning kan betragtes som en tegneteknik, som er særlig anvendelig på begynder- og mellemtrin, men også på ældste trin kan den bruges.

Perspektivtegning

Perspektivtegning er en tredje model til geometrisk beskrivelse af den omgivende verden. Denne form for beskrivelse er omtalt på mellemtrinet og på ældste trin. Med enkle midler kan eleverne sættes i stand til at beskrive rumlige figurer eller bygninger og landskaber, sådan som de ser ud, når vi betragter dem. Altså en tegnemæssige beskrivelse af det velkendte fænomen, at noget ser mindre ud, når det er langt væk.

Tegning i perspektiv er matematisk velbeskrevet, selv om denne tegnemetode oftest læres uden at knytte matematiske betragtninger til arbejdet. Ved blot at indføre en horisontlinje og forsvindingspunkter kan eleverne skabe tegninger, som kan gøres til genstand for overvejelser.

Man kan opfatte perspektivtegning som en differentieringsmulighed, hvor elever, der i særlig grad bliver optaget af denne form for tegning, kan knytte udvikling af geometriske begreber hertil.

Tegning som udgangspunkt

Tegning som udgangspunkt for en geometriundervisning er et pædagogisk valg. Der er tale om at vælge et udgangspunkt i elevernes egen erfaringsverden. Elevens forsøg på at beskrive sine iagttagelser gennem tegning kan ikke i matematisk forstand kaldes geometri, men arbejdet rummer beskæftigelse med centrale begreber som form, størrelse, beliggenhed, sammenligning osv.

Begrebet "at tegne" knytter sig til en lang række områder fra kunst til design, over arkitektur til teknik og geometri. Ved at beskæftige sig med forskellige former for tegnede udtryk skabes et grundlag for en senere matematisk teoridannelse.

Eleverne kan herved opnå en mere generel forståelse af geometriens rolle i en kulturel sammenhæng. Arbejdet kan også give eleverne en praktisk indsigt, som kan give eleverne indtryk af, at arbejde med en mere teoretisk geometri har en begrundelse, der rækker ud over selve matematikken.

De pædagogiske muligheder for at lade undervisningen have et konkret udgangspunkt vil i øvrigt ofte kunne hente inspiration fra kunst, design og arkitektur. I forsøget på at lave et mønster til tekstil- eller billedkunst, i forsøget på at forstå mønstre i orientalsk udsmykning, og i forsøget på at lave en teknisk tegning vil eleverne kunne se et mål for arbejdet, som vil kræve matematisk aktivitet i form af at benytte bestemte regler og fremgangsmåder.

Arbejdet med *tegning* som grundlag for geometriundervisningen giver for læreren anledning til følgende overvejelser:

Frembringelsen af det tegnede udtryk.

Gennem arbejdet med at fremstille tegninger ved hjælp af de forskellige tegnemetoder vil den umiddelbare hensigt være, at eleven lærer at anvende den pågældende metode. For at det kan ske, må eleven gøres opmærksom på eller selv opdage de særlige regler, som er knyttet til metoden. Grundlæggende elementer fra geometrien vil her kunne blive lige så synlige som i andre former for geometriundervisning: Linjer, som begrænser plane figurer, deres indbyrdes beliggenhed, parallelitet, skæring under dannelse af vinkler, figurer med typiske træk (firkant, trekant), længde, flade og rummål.

Troværdigheden af det tegnede udtryk

De forskellige tegnemetoder vil ofte "respektere" forskellige egenskaber ved den tegnede genstand. Hvilke egenskaber ved genstanden i den fysiske verden kan man genfinde på den tegnede model af den? Hvilke informationer er forsvundet?

Ingen tegnemodeller rummer alle de informationer, man kan finde, hvis man undersøger den virkelige verden. Det holdbare kan fx være, at linjer, som i virkeligheden er parallelle, også på modellen vil være parallelle. Eller det kan være, at geometrisk form bevares. Men det vil fx ikke være tilfældet ved perspektivtegning, hvor en flade, der i virkeligheden er rektangulær, kan blive trapezformet på tegningen.

Ræsonnement og bevis i forbindelse med geometrisk tegning

Arbejdet med de forskellige tegnetoder i geometri giver mange muligheder for at inddrage fundamentale træk fra matematikken som fx ræsonnement og bevis. I et nøjere studium af den enkelte tegnemodel kan man komme ind på spørgsmål som: Er de regler, vi benytter, knyttet til særlige forhold, eller har de generel karakter? Vil man kunne formulere definitioner og sætninger i forbindelse med opbygningen. Vil vi matematisk kunne begrunde de metoder, som anvendes ved en bestemt tegnetode?

Geometri er mange ting

Geometrien fremstår som et område af matematikken, som virker umiddelbart tilgængelig for alle elever. I sin visuelle fremtræden kan den af begynderen behandles intuitivt, dvs. uden noget formelt regelsystem. Den kan repræsenteres gennem konkrete objekter, og den er en direkte forbindelse til konkrete situationer fra det virkelige liv. Ofte kan grundlæggende matematiske begreber og sammenhænge synliggøres med geometriske hjælpemidler og derved være med til at danne grundlag for indsigt og forståelse. Fx kan "geometriske iklædninger" være en hjælp for elever, som har problemer med at forstå en algebraisk formel eller beskrivelse.



**Billedet er ikke medtaget
på grund af
ophavsret**

Viggo Hartz

I det følgende skal gives nogle korte eksempler på, hvorledes det intuitive, det konkrete, det undersøgende og det analyserende kan præge elevernes beskæftigelse i forbindelse med geometriske aktiviteter.

Arbejde med geometri med udgangspunkt i konkrete problemer

**Billedet er ikke medtaget
på grund af
ophavsret**

Viggo Hartz

For såvel den syvårige som den syttenårige kan der formuleres problemstillinger, som tager udgangspunkt i konkrete objekter eller billeder af konkrete objekter. Det kan være fysiske objekter fra elevernes hverdag eller objekter, som de selv bygger. Det kan være særlige materialer fremstillet med en pædagogisk hensigt: - brikker, klodser, stænger. Det kan være særlige undervisningsmiljøer, hvor eleverne i en afgrænset verden kan gennemføre undersøgelser med et endeligt antal løsninger - fx sømbræt eller centicubes. Det kan være objekter, som beskrives på en dataskærm, og som kan bearbejdes ved hjælp af tastatur eller mus.

Det er vigtigt, at konkretiseringen er et middel og ikke et mål. Gennem arbejdet med det konkrete objekt skal eleven prøve at nå en eller anden form for erkendelse og indsigt. Det er muligt, at eleven fx vil opfatte det at fremstille en terning af kvadratiske brikker som selve opgaven, men det er lærerens opgave at være med til at udvikle problemet, så der opnås en indsigt, fx gennem spørgsmålet: Kan I lave et andet legeme, der ligesom terningen laves af seks sider?

Dette arbejde vil hos yngre elever foregå intuitivt, men hvis læreren gør det til hensigten for arbejdet, kan de ikke undgå at foretage overvejelser over hvilke forudsætninger, der skal være til stede, for at deres undersøgelser kan føre til et resultat. "Skal det altid være firkanter?" "Skal der være parvis lige store sider?" "Kan man lave et sekssidet legeme, som kun består af trekanter?", osv.

For ældre elever vil opgaveformuleringen kunne tvinge eleverne ud i overvejelser af mere teoretisk karakter. Som eksempel på sådanne overvejelser gives her en beskrivelse af et sådant undervisningsforløb.

En gruppe elever i 8. klasse skal prøve at fremstille et legeme, som kun består af regulære femkanter (femkanter med lige lange sider og lige store vinkler). De har ikke fået færdige femkanter, men må selv finde ud af, hvordan man fremstiller en regulær femkant.



**Billedet er ikke medtaget
på grund af
ophavsret**

Her er en undervisningssituation, der adskiller sig fra den traditionelle undervisning i geometri. I denne ville der være foregået et deduktivt arbejde, hvor eleverne ville være præsenteret for definitioner og sætninger, som skulle bevises, og arbejdet ville i vid

udstrækning være et spørgsmål om at lære og huske både beviser og den rigtige rækkefølge. Hukommelsen ville spille en stor rolle, og det kreativt skabende ville være svagt repræsenteret.

Viggo Hartz

Uden disse forudsætninger må eleverne støtte sig til deres erfaring og til intuition. Forløbet kan fx være dette:

- en af eleverne tegner en femkant - tilfældigt - klipper den ud med limkanter
- flere femkanter bliver klippet ud - samleprocessen kan begynde.

Ingen i gruppen har opfattet opgaven som vanskelig. Det er jo let, de har prøvet noget lignende så mange gange, men: - siderne passer ikke sammen!

Eleverne er så erfarne, at de umiddelbart kan se, at de har tænkt for lidt. De må nu selv formulere de egenskaber, som læreren ellers ville have lært dem i en sætning: I en regulær femkant er alle sider lige lange og alle vinkler lige store. Deres første konklusion er lige lange sider, hvis opgaven skal kunne løses.

Nu bliver det vanskeligt at tegne en femkant med denne egenskab. Den første side tegnes let, men i hvilken retning skal den næste side tegnes? Vi kender ingen vinkler !

Eleverne har tidligere prøvet at rive hjørnerne af en trekant - lagt dem ved siden af hinanden, så de dannede 180° . Læreren behøver nu blot at give et lille skub: Prøv at dele femkanten op i trekanter. Læreren modspil i elevernes forsøg på at knække nøden er selve læreprocessen - selve undervisningen.

Anvendelse af geometrisk illustration på andre områder af faget

Overskriften sigter især på de mange tilfælde, hvor geometriske figurer el. lign. kan være en støtte for andre matematiske discipliner. Alle lærere har erfaret, at man ofte kan tegne sig igennem et problem, som en elev ikke forstår, fx: "En halv er det samme som to fjerdedele".

Matematiske regler som den pytagoræiske læresætning kan bevises ved geometrisk betragtning. Også ved løsning af praktiske problemer kan geometrien med fordel benyttes. Skal man fx finde ud af, hvor mange hylder af en bestemt størrelse, der kan fås ud af en plade, kan en tegning give løsningen.

Der er elever, som har lettere ved at forstå, hvad det handler om, når de får problemet repræsenteret gennem en tegning. Derfor skal denne repræsentationform også være en mulighed for alle elever. Det kan endda tænkes, at det for nogle elever vil være tegningen, som resten af elevens liv er erindringen, der giver handlekompetence på det abstrakte plan.

Undersøge og eksperimentere

Arbejdet med areal og rumfang udgør et stort område af undervisningen. Det kan starte allerede på begyndertrinnet med undersøgelser, hvor eleverne ved dækning med brikker søger at finde fladestørrelse. Ved måling med vand kan man finde rumfang.



**Billedet er ikke medtaget
på grund af
ophavsret**

Her skal opmærksomheden især rettes mod overgangen fra måling til beregning ud fra visse typiske størrelser ved de

Viggo Hartz

forskellige figurer. Altså mod det, at eleven fx indser, at længden af radius i en cirkel er den eneste information, man behøver for at bestemme cirkelns areal.

Området er præget af formler. Der er mange, og de kan slås op, men det er afgørende for elevernes forståelse af, hvad formler betyder, at de kommer igennem nogle fundamentale erkendelsesprocesser.

Det begynder hos de yngste elever:

- ved at lægge to helt ens trekanter ved siden af hinanden kan man altid få en firkant,
- ved at lægge kvadratiske brikker på en rektangulær flade kan man finde et tal, som beskriver størrelsen af fladen.

Det skal prøves mange gange og mødes i mange sammenhænge.

Eleverne opdager, at rektangler er figurer, der direkte kan måles (med kvadrat som måleenhed) og derefter omsættes til regnearten multiplikation. De fleste andre figurers størrelsesbeskrivelse kan kun forstås ved ræsonnementer.



**Billedet er ikke medtaget
på grund af
ophavsret**

I dette tilfælde kan eleven se, at den venstre figur er 2 stor, fordi den består af to firkanter. Trekantens størrelse på den anden figur kan gennem ræsonnement indses at være 1. Enten fordi den er halvdelen af 2, eller fordi den har samme størrelse som en anden, som er 1. Nogle elever kan forbløffende tidligt foretage denne tænkning - nogle kan endda sætte sprog på.



**Billedet er ikke medtaget
på grund af
ophavsret**

På tegningen herover er vist en række figurer på sømbræt. De er samlet til denne lejlighed - ikke til en samlet undervisningssituation. Men figurene viser netop elevernes mulighed for at udvikle metoder til størrelsesbeskrivelse af plane figurer.

- retvinklede trekanter er altid halvdelen af et rektangel
- parallelogrammer kan altid omdannes til rektangler med samme areal - ud fra mål, som kan findes på parallelogrammet
- ikke retvinklede trekanter er halvdelen af et parallelogram.

I løbet af 4.- 6. klasse kan den enkelte elev udvikle metoder, der bygger på erkendelse og indsigt, så eleven på et senere tidspunkt, hvor det udenadslærte er glemt, vil kunne gendanne den viden, som engang blev erhvervet. I processen med denne størrelsesbeskrivelse er det afgørende, at eleverne selv udvikler et sprog, som beretter om deres egne konklusioner. Ved at sætte elevers forskellige sproglige udtryk op mod hinanden, gives der mulighed for at drøfte "den skarpe formulering", som udelukker misforståelser.

For ældre elever, hvor konkretiseringen ofte tones lidt ned, er der fortsat et behov for at skabe indlevelse i de grundlæggende begreber. Det er vanskeligt at forestille sig, at eleverne kan udvikle et størrelsesbegreb knyttet til rumlige figurer uden at have været igennem fysiske målinger, som kan danne grundlag for beregninger - helt på samme måde som ved arbejdet med arealbegrebet.



**Billedet er ikke medtaget
på grund af
ophavsret**

Man kan tegne på computeren

Viggo Hartz

Anvendelse af computeren i undervisningen har givet anledning til indgående faglig-pædagogiske overvejelser med hensyn til de undervisningsmæssige konsekvenser, ikke mindst med hensyn til de grundlæggende kundskaber og færdigheder inden for talregningen.

Situationen for geometriundervisningen er imidlertid helt parallel hermed, omend måske ikke så påagtet. Til undervisningsbrug er fx udviklet programmer, som kan støtte arbejdet med konstruktion af en trekants omskrevne cirkel. Sådanne programmer kan tegne en trekant, herefter tegne midtnormaler og endelig tegne cirklen med centrum i midtnormalernes skæringspunkt og med den givne radius.

Det vil derfor være afgørende, at man som lærer gør sig klart, hvad hensigten er med lære geometri, og det vil være lige så afgørende, at man gør sig mediets muligheder som undervisningsmiddel klart. Når nu midtnormalerne bliver tegnet, blot fordi man beder om det, så vil selve tegnekompetencen, som ellers kræver øvelse, ikke længere fylde på samme måde i undervisningen. Så vil man få en parallel til regnefærdigheden: Når nu lommeregneren eller computeren kan give det rigtige resultat, så vil man kunne flytte tid over til overvejelser, som knyttes til indsigt og forståelse.

Man må her gøre sig klart, at det interessante ikke er, at computeren kan tegne hurtigere og pænere. Det interessante er derimod, at eleverne får øgede muligheder for at arbejde med tegning, undersøgelser, manipulationer og analyser i tæt sammenhæng. Eleverne kan fx tegne en figur, manipulere med den på skærmen, gå tilbage og tegne videre på den, foretage nye

eksperimenter osv, og det kan ske under fleksible arbejdsformer, der kun vanskeligt kan gennemføres, hvis eleverne udelukkende anvender blyant, passer og papir.

Også i forbindelse med arbejdet med geometriske mønstre rummer computeren store muligheder på alle klassetrin, ligesom det er oplagt at tænke på samarbejde med faget billedkunst, hvor computeren kan indgå som billedgenerator.

I læseplanen er det anført, at man på ældste klassetrin kan arbejde med "enkle beskrivelser af figurer både i to- og tredimensionale koordinatsystemer, bl.a. med anvendelse af computer". Der er med denne formulering naturligvis ikke tale om, at beskrivelsen af figurer i et 3-dimensionalt koordinatsystem skal ske ved anvendelse af ligninger el.lign., men først og fremmest om konkrete eksperimenter i en rumlig model.

Men computeren rummer her særlige muligheder for at arbejde i et tilsyneladende 3-dimensionalt rum, og det kunne fx være oplagt at lade eleverne stifte bekendtskab med et program af den slags, som anvendes af forretninger, der forhandler køkkener. Her kan man ved at opgive det hjemlige køkkens mål meget hurtigt kunne få de forskellige køkkenindretninger at se på skærmen. Og man vil kunne få de færdige resultat at se i forskellige vinkler som perspektivtegning.

Undervisningsforløb

I dette afsnit er beskrevet 5 undervisningsforløb, knyttet til bestemte klassetrin, og således at de tilsammen dækker hele skoleforløbet. Beskrivelserne er eksemplariske i den forstand, at der først og fremmest er lagt vægt på den faglig-pædagogiske tankegang end på det konkrete indhold. Denne tankegang vil kunne overføres til andre klassetrin.

Talforståelse og arbejde med konkrete materialer

Et undervisningsforløb i 1. klasse

Ved starten af 1. klasse er der elever, som kun med besvær kan håndtere situationer, hvori der indgår én-cifrede tal. Samtidig er der elever, som både kan læse og skrive to-cifrede tal. Disse elever kan endog benytte ofte tallene på en sådan måde, at de viser forståelse af både rækkefølge og antal.

I de første måneder er det derfor en vigtig opgave at skaffe sig kendskab til spredningen i elevgruppen. Det kan gøres gennem samtaler med eleverne som en del af undervisningen. Ofte vil den bedste indsigt i det enkelte barns formåen opnås ved at se på deres talforståelse i sammenhænge, hvor der trækkes på elevernes egne erfaringer og omverdensforståelse.

Mål for undervisningen

Med udgangspunkt i foranstående kan der tilrettelægges en undervisning, som især skal give eleverne mulighed for at udvikle talforståelsen. Der planlægges, så den enkelte elev kan bygge på egne forudsætninger og udvikle egne strategier, og således, at eleverne får mulighed for at tale sammen om deres erfaringer. Problemstillingerne er indledningsvist formuleret af lærerne, så der er mulighed for, at eleverne kan stille egne spørgsmål til problemerne.

Målet med de følgende eksempler er:

- at udvikle talforståelse
- at arbejde med sammenhængen mellem symbol og mængder
- at beskrive med tal
- at beskrive situationer, som har karakter af addition og subtraktion.

De følgende problemformuleringer vil i nogen grad være frigjort fra de sammenhænge, som i høj grad er af betydning for elevens udvikling af talforståelse, sådan som det kan ske, når talarbejdet knyttes til emner som trafik, boligen, foråret osv.

Lærerens grundlæggende forståelse af talbegrebets udvikling hos børn er afgørende for, om man som lærer kan se mulighederne i de enkelte emner. Læringsstrategierne med hensyn til

taludvikling er imidlertid de samme, hvad enten arbejdet foregår i en praktisk sammenhæng eller ej.

Indledende talforståelse

Det efterfølgende eksempel, der beskrives som en selvstændig aktivitet, kan indgå i undervisningen i forskellige organisationsformer.

Opgaven går ud på at bygge talbilleder med centicubes eller cuisenaire-stænger.

Formulering til eleverne:

Byg med to farver en 5-er og skriv talnavnet.



Tilsvarende opgaver formuleres for andre tal end 5.

To elever, der sidder over for hinanden, arbejder sammen på den måde, at de bygger hver for sig og lægger deres resultater i en fælles bunke. På et tidspunkt lægger den ene en 4+1 stang ind i bunken. Den anden elev vender den, og det giver anledning til følgende ordveksling:

"Den har vi !

Nej, den ene er 4+1 og den anden er 1+4 !

Jamen, det er det samme !

Vi skal have mange løsninger !

Så tæller vi dem som to løsninger, men de er altså ens !"

Resultaterne tegnes og beskrives og sættes op på en fælles tavle for hele klassen. Andre grupper protesterer, og det giver mulighed for en fælles klassesdrøftelse.

Klassen konkluderer, at der er to løsninger - 1 gul og 4 røde er ikke det samme som 1 rød og 4 gule. Men en enkelt fastholder, at regnestykket er det samme.

En af de andre elever, som arbejder alene, kommer meget hurtigt og meddeler, at han har dem alle sammen: *Der er 6 !* Læreren bygger uden at sige noget en stang af 2 gule, 1 rød og 2 gule. *Har du den?* Eleven ser et øjeblik forundret ud og farer derefter hen til sit bord og arbejder videre. Efter nogen tid kommer han igen og meddeler - denne gang lidt mere forsigtigt: *Jeg tror, at der er 17 !*

Man kan se på hans papir, at han har udviklet et system, som han har arbejdet efter. Han kan ikke sprogligt formulere, hvilket system han har benyttet, forstår næppe, hvad læreren mener med system.

Andre elever er tilfredse med at finde nogle og viser ingen særlig interesse for legen med konkurrenceelementet: at finde så mange som muligt. De har hygget sig og ser slet ikke noget større problem.

Nogle elever bliver optaget af, at der bliver flere og flere løsninger jo større tal, de arbejder med. Nogle gange skyldes det, at læreren udfordrer dem, andre gange finder de selv på det.

En gruppe prøver at finde flere løsninger ved at inddrage flere farver og laver sig derved en helt anden opgave. De får en svag fornemmelse af, at $4+1$ er en model for både 4 grønne + 1 blå og for 4 gule + 1 rød, men at det var det samme eksempel. Eleverne har på sin vis leget sig til ny erkendelse.

Indledende arbejde med addition

På et tidspunkt skal eleverne være med til at udvikle metoder, der kan hjælpe dem til at erstatte $4+7$ og $34+58$ med et enkelt tal. Traditionelt har det betydet en række forøvelser, som kunne føre til, at de kunne lave en opstilling efter anvisning og derefter udregne resultatet. Det kræver i denne form forståelse for positionssystemet, hvis disse øvelser skal give mening - og den forståelse er næppe til stede på dette tidspunkt.

Den følgende aktivitet, som kan illustreres således



Eleverne oversætter regneudtrykkene til talbilleder ved hjælp af tiere og enere. Selve udregningen foretages med de konkrete materialer, som mere eller mindre tælles. De regner derfor ikke i et positionssystem: Tiere og enere er jo repræsenteret ved hver sit materiale. 3 tiere bliver til 3 stænger, og 4 enere bliver til 4 kuber. Selv om man ændrer på "tiernes" fysiske placering på bordet, bliver de ved med at være tiere.

I stedet for at stile direkte mod en af de sædvanlige opstillinger af additionsopgaver, kan eleverne gennem dette arbejde dels udvikle forståelse for positionssystemet, dels kan de faktisk udføre udregninger, som er ganske store - uden et særligt formaliseret system.

En dreng arbejder i slutningen af første klasse med lange rækker af addender. Han har hundredeplader til rådighed. Alligevel kommer han en dag "for langt". Nede fra klassen kan man høre: *Lærer - må jeg bruge sakse som tusinder.*

Lægge sammen, veksle, låne og alle de andre begreber fra den traditionelle algoritmeregning bliver til de fysiske processer, som navnene i virkeligheden er udtryk for. Individuelt slipper eleverne efterhånden konkretiseringen, alt mens de, dels udvikler hovedregning (det ser ud som om de i den første periode uden de konkrete materialer "tænker" konkrete materialer), og dels finder en bestemt måde at lave notater og opstillinger, som ofte de traditionelle opstillinger.

Med lommeregneren til rådighed kan eleverne selv gøre erfaringer, kontrollere egne resultater eller udforske det spændende redskab med selvformulerede eller lærerformulerede problemer.

Leg som middel i undervisningen

Leg må indgå i mange situationer i undervisningen. Der er forskel på barnets egen leg, hvor legen er målet i sig selv, og lærerens ønske om at inddrage legen som et middel i undervisningen.

**Billedet er ikke medtaget
på grund af
ophavsret**

Når man benytter forskellige fysiske objekter som tællematerialer, talnavne eller som en væsentlig del af geometriundervisningen, så er man tæt på elevens egen leg med tilsvarende materialer. Det er virksomhedsformer fra legen, der må bruges i undervisningen.

Viggo Hartz

Men der kan også forekomme aktiviteter, hvor eleven mere direkte opfatter det, der sker som leg. Når eleverne sjipper, mens de tæller, hvor mange de får, er der kun et lille spring til at tælle fx med de lige tal, som forøvelse til arbejde med to-tabellen. De kan måske også få lyst til at holde regnskab med det resultat, de forskellige deltagere opnår i sjipningen og skrive resultaterne ned i et særligt system, som de selv udvikler.

Hvis eleverne spiller kuglespil med en gammel skotøjsæske, hvori der er skåret åbninger af forskellig størrelse, som tildeles forskellige talværdier, så er man også på grænsen mellem leg og læring, selv om eleverne lokkes eller direkte opfordres til at nedskrive deres resultater. Købmandsforretning er en anden form for leg, hvor eleverne søger at efterligne de voksne. Igennem aktiviteterne føres eleverne ind i tallenes verden.

Der vil i hele dette arbejde være en høj grad af individualitet, som gennem samtaler og konflikter, der følger af børnenes forskellige hypoteser, gradvist udvikler sig til et fælles sprog. Ethvert forsøg på at forære fællessproget til eleverne og håbe på, at forståelse gradvis vil komme siden hen, vil være en umyndiggørelse af elevens egen læreproces.



**Billedet er ikke medtaget
på grund af
ophavsret**

På centrale områder er den enkelte elev med til at udvikle sin egen forståelse af symbolbeskrivelse af virkelighedens fænomener. Eleven skal fx selv være med til at nå en erkendelse af at "3" knyttet til objekter intet har at gøre med de fysiske egenskaber, som eleverne ellers er så optaget af: jern, rund, rød, hård, levende osv., men at "3" på en helt anden måde kan være *fælles*, uafhængig af tingenes beskaffenhed.

Viggo Hartz

Organisering af undervisningen i grupper

Et undervisningsforløb i 3. eller 4. klasse

I mange situationer vil det i undervisningen være en fordel, at eleverne arbejder sammen i grupper. Gruppeopdelingen kan foretages ud fra forskellige principper. Her er beskrevet et eksempel, hvor læreren vælger, at eleverne i en periode på ca. 3 uger skal arbejde problemorienteret med: antalsbestemmelse ved multiplikation og måling af rumfang.

Det er endvidere hensigten, at hverdagserfaringer og de erfaringer, eleverne får i skolen fortsat er udgangspunktet for undervisningen, samt at eleverne udvikler forståelse af matematikken og dens tilblivelse gennem deres selvstændige medvirken ved opbygningen af de faglige begreber.

Eleverne får en fælles orientering om forløbet, så de ved, hvad arbejdet handler om. Herved bliver der skabt ro om undervisningen, og der kan blive tid til fordybelse inden for den givne tidsramme.

Da måling af rumfang skal foregå ved en vask uden for klasselokalet, hvor der ikke er plads til alle elever på samme tid, vælger læreren at lade eleverne arbejde i 6 grupper efter denne model:



Grupperne arbejder med hvert delemne i 3 - 4 lektioner, hvorefter der skiftes til et nyt emne.

Måleaktiviteterne kræver normalt ikke så stor lærerhjælp, derfor får læreren større mulighed for samtale med eleverne i de andre grupper under forløbet.

Eleverne i en gruppe arbejder ikke nødvendigvis med præcist det samme delemne, men de har hele tiden mulighed for at tale sammen under arbejdet.

Hvordan gjorde du det?

Se, nu har jeg fundet en nem måde at gange på!

Skal vi arbejde sammen om at måle, hvor meget vand der kan være i flaskerne?

Som oplæg til arbejdet og som hjælp ved styringen vælger læreren at lade eleverne arbejde med udvalgte sider fra lærebogsmaterialet suppleret med selvfremstillede elevarbejdskort med arbejdsopgaver.

Læreren plan for forløbet kom herefter i kort form til at se sådan ud:



- Emner:
- A: Gange med 10
- B: Gange
- C: Hvad fylder det?

- ad A. Prøve/opdage/formulere
 1. Opgavepapir med tern + saks
8 × 23 tern. Hvor mange?
 2. Arbejde i grundbogen
Centicubestænger
 3. Tegn og regn
Gange 10 på centimeterpapir
Gange 100 på millimeterpapir
 4. Penge som tællemateriale

- ad B. Hvor mange tern?
 1. Hvor mange tern?
 2. Tegn og regn
 3. Byg og regn
 4. Arbejdskort

- ad C. Måleaktiviteter.
 1. Måling af indhold i glas, bægre mv.
 2. Omregning fra cm³ til ml
 3. Byg en terning
 4. Måling med centicubes

Alle grupper: Extra opgaver i arbejdsbogen på de efterfølgende sider.

I lærerens arbejdsplan henviser numrene til elevarbejdskortene, hvoraf nogle indeholder praktiske byggeopgaver med illustrationer, andre beskriver tegne- og regneopgaver, og endelig er der også henvisninger til arbejdsbogen, hvor disse emner er beskrevet.

Evalueringen af undervisningen og elevernes læring foregår ved, at læreren ud fra sine samtaler med eleverne hele tiden er opmærksom på, hvor der kræves hjælp, hvor der kan stilles uddybende spørgsmål, eller hvor der simpelthen skal stilles meget håndfaste krav om indsats mv.

Der bliver også foretaget en fælles opsamling af, hvad man enkeltvis eller i grupperne er nået frem til. Læreren sammenkalder fx eleverne fra de to grupper, der har arbejdet med samme emne og taler med dem om deres arbejde og de overvejelser, de har gjort sig undervejs.

Som afslutning på arbejdet må læreren naturligvis gøre sig overvejelser over det samlede indtryk af forløbet. Har eleverne nærmet sig det mål, der var ønsket? Hvilke konsekvenser kan der drages med hensyn til det videre arbejde i klassen? Er der enkelte elever, der skal tilbydes særlige hjælpeforanstaltninger? Hvad mener eleverne selv om forløbet? På baggrund af disse indtryk planlægges det næste forløb i klassen.

Undersøgelser

Et undervisningsforløb i 6. klasse

På dette trin vil eleverne kunne skabe sig overblik over begrænsede problemstillinger fra det nære samfundsliv som fx "Skolens trivselsprofil", og de vil kunne medvirke til behandling heraf.

I arbejdet med emnet kan de få brug for at benytte en række faglige redskaber. Det er dog ikke givet, at eleverne i alle detaljer behersker de faglige sider, der kommer til at indgå. Men arbejdet kan give en udvikling af deres faglige færdigheder og kundskaber på det stadi, hvor de står hver især. Derudover kan det give indsigt i, hvordan de selv må træffe beslutninger om, hvilke dele af matematikken de vil anvende, og - ikke mindre vigtig - hvordan de vil anvende den.

I det beskrevne eksempel fokuseres der på en undersøgelse af elevernes skolevej. Udgangssituationen er åben. Der er således ikke på forhånd stillet spørgsmål. En væsentlig del af arbejdet består derfor i at formulere spørgsmål til undersøgelsen og vælge metoder til behandlingen. Endelig må der som afslutning tages stilling til, hvad der ud fra undersøgelsen kan konkluderes.

Eksempel

På grund af en stigende bekymring hos forældre og børn angående farer ved trafikken omkring skolen bliver det bestemt, at 6. klasse i arbejdet med skolens trivselsprofil specielt skal beskæftige sig med dette.

En fælles samtale i klassen giver et dybere indblik i problemstillingen. Eleverne formulerer spørgsmål, som er medvirkende til en første afklaring af delområder og arbejdsmetoder.

Spørgsmålene har karakter af, at de ikke er tænkt ind i skolens fagrække, men ind i et overordnet syn på problemet. For matematiklæreren bliver det en speciel opgave at sørge for, at eleverne udnytter matematikken på bedste vis. Der bliver skabt enighed om, at en undersøgelse, der indeholder aktuelle tal, er et væsentlig grundlag for en senere argumentation over for politikerne.

Til belysning af forholdet mellem trivsel og skolevejen vælges to hovedområder:

- A. En undersøgelse af, hvordan eleverne kommer i skole og deres opfattelse af at færdes på skolevejen.
- B. En trafikundersøgelse, som viser noget om trafiktætheden i området omkring skolen.

Eleverne deler sig i to grupper, og grupperne foretager en yderligere afklaring af deres delemne. De debatterer dels målformulering for undersøgelsen dels en beslutning om arbejdsformer.

For trivselsgruppen indgår disse spørgsmål:

- *Hvorfor foretager vi denne undersøgelse?*
- *Hvad kan undersøgelsen vise os noget om?*
- *Skal besvarelsenerne samles for hele skolen eller deles op i flere aldersgrupper?*
- *Hvor mange kategorier kan vi overskue, og hvor mange skal vi mindst have, for at det giver et rimeligt overblik?*
- *Hvordan kan opgørelsen af dataene foregå?*

Det hele resulterer i, at eleverne udformer to spørgeskemaer. De 207 elever i 0. - 3. klasse spørges om, hvordan de kommer i skole. Alle skolens 489 elever i 0. - 10. klasse spørges om, hvad de mener om deres skolevej.

Et par elever benytter et dataprogram, hvor de mange data fra spørgeskemaerne indtastes og tælles sammen. De kan vælge at få materialet udskrevet med de aktuelle tal, eller ved at tallene er omregnet til procent, og desuden kan de vælge mellem forskellige diagramtyper.

Det er tydeligt, at eleverne har en vis fortrolighed med brug af computeren. Lærerens samtale med gruppen drejer sig nu om, hvor megen forståelse de har af det, de får skrevet ud.

Først ønsker eleverne en forklaring på, hvordan et udtryk i procent fremkommer. På dette trin fastholdes det grundlæggende procent begreb, at procenttallet udtrykker antallet set i forhold til en samlet helhed på 100. Nogle elever prøver om de kan få de samme procenttal ved hjælp af lommeregneren.

~~Billedet er ikke medtaget
på grund af
ophavsret~~

~~Billedet er ikke medtaget
på grund af
ophavsret~~

~~Billedet er ikke medtaget
på grund af
ophavsret~~

Ved besvarelserne af spørgsmålet: "Hvordan kommer du i skole?" er der enighed om, at skemaet og især pinediagrammet er et godt billede af talmaterialet. Men i en sammenligning klasserne imellem om: "Hvad synes du om din skolevej?" er det mere kompliceret, da der ikke er lige mange elever i de 3 grupper.

Uden helt at have forstået, hvordan et cirkeldiagram opbygges, er det klart for gruppen, at det viser opgørelsen mest tydelig, da man med det blotte øje kan se, hvor stor en del af "lagkagen" hvert svar udgør. De får et indtryk af, at de 59

elever i 4. - 6. klasse og de 108 elever i 7. - 10. klasse, som er tryk ved skolevejen, i begge tilfælde udgør samme andel i forhold til det samlede elevtal på klassetrinet.



**Billedet er ikke medtaget
på grund af
ophavsret**

Viggo Hartz

Hvilken udtryksform for procenttallene:

skemaer, blokdiagrammer eller cirkeldiagrammer vil nu være bedst egnet til at forklare andre om undersøgelsens resultater? Kan man vælge en form, der særlig godt tilgodeser klassen synspunkter? Vil det være "fair" at vælge sådan?

Når både trivsel- og trafikgruppen har draget konklusioner, samles hele klassen for at diskutere hvilket samlet resultat, der kan udledes af undersøgelserne. Der træffes herefter beslutning om, hvordan resultaterne kan indgå i en samlet formulering vedrørende skolens trivselsprofil. Man vælger at lave et kort over skoledistriktet. Fra tekster, hvori undersøgelsens resultater indgår, tegnes pile til de aktuelle steder, hvor ændringer skønnes nødvendige.

På et forældremøde fortæller eleverne om, hvad de har fundet ud af om skolevejen, og om hvad de vil foreslå.

Undervejs har eleverne som mellemarbejde haft til opgave at udsmykke klasselokalet med tegninger, hvor der kun må bruges passer. I lærebogen findes et afsnit om eksperimenter med cirkler. Som følge af mellemarbejdet vælger læreren at springe dette over.



Elevstyrede eksperimenter

Et undervisningsforløb i 8. klasse

Lærerne for en klasse gennemfører en fælles tilrettelæggelse af ugeplanen for de fleste fag. Det matematikarbejde, der omtales nedenfor, indgår i følgende planlægning for en periode over nogle uger.

Halvdelen af undervisningstiden benyttes til et tværgående emne, som er tilrettelagt som et projektarbejde. Den anden halvdel benyttes til arbejder, der er tilrettelagt af faglærerne i dansk, matematik og fremmedsprog. Eleverne er organiseret i grupper, men der foregår både individuelt arbejde og gruppearbejde. Den enkelte gruppe tilrettelægger sin egen ugeplan efter overvejelser ved ugens begyndelse. På dette tidspunkt drøfter grupperne også målsætning for de forskellige arbejder, der er i gang. En gruppe kan således, hvis de finder det passende, bruge hele dage på det tværgående emne.

Det kan også ske, at nogle af gruppens medlemmer på samme tid arbejder med det tværgående emne og med rent faglige problemstillinger, hvis planlægningen giver mulighed for det.

Der findes i denne organisation en meget stor fleksibilitet, og det er derfor nødvendigt, at eleverne selv involverer sig i arbejdet, hvis det skal lykkes. De skal fx lære at planlægge, så de kan få hjælp på tidspunkter, hvor den aktuelle faglærer er til stede.

Der kan også planlægges fællestimer for hele klassen både med hensyn til de faglige forløb og med hensyn til det tværgående emne.

Ugeplanens matematikarbejde styres af en arbejdsplan, der har til hensigt at give eleverne mulighed for selvstændig virksomhed. Den rummer valgmuligheder. Arbejdsplanen har til hensigt at skabe en fleksibel ramme, hvor tid er af afgørende betydning: Forskellig tid til forskellige elever for at opnå egen erkendelse og egne færdigheder. Planen har også til hensigt at give plads til varierede metoder (som kan være den samme metode med forskellig tid) og mulighed for at arbejde med forskellige abstraktionsniveauer inden for samme begrebsområde.

Forud for perioden har eleverne gennemarbejdet et materiale, hvor de kan checke deres færdigheder inden for forskellige områder.

En sådan checkliste kan danne grundlag for nogle af elevernes beslutninger om, hvad de vil arbejde med. Der er stor forskel på i hvor høj grad denne liste bliver et arbejdsredskab, men det er tydeligt på disse klassetrin, at flere og flere elever selv indser betydningen af at gøre en indsats for at lære et givet område.

En del af materialet til arbejdsplanen er udvalgt fra klassens matematikbog, andet er hentet fra forskellige andre materialer.

Netop nu rummer matematikarbejdsplanen disse delemner:

- A. Diagonaler. En åben problemstilling om geometri
- B. Lommeregner i undervisningen. Regn med maskiner
- C. Statistisk sandsynlighed. Hvordan laver man en undersøgelse? Hvor meget kan man tro på resultatet ud over det, man faktisk har fået at vide?
- D. Individuelt arbejde med færdigheder. Særlig aftale med elever, som har besluttet at træne et bestemt færdighedsområde.

Viggo Hartz

Kun to af disse områder skal nærmere omtales:

Regn med maskiner

Et af de afsnit eleverne kan arbejde med, hedder i planen Regn med maskiner. Det er et afsnit, der handler om brugen af lommeregner. Et redskab, der kan klare kalkulation, men også er en mulighed for at skabe indsigt og færdighed. Eleven bliver i materialet stillet over for selv at skulle tage stilling til i hvilket omfang de finder det rimeligt at anvende de tekniske hjælpemidler.



Følgende lille opgaveserie indgår i materialet



Læreren har i en differentieret undervisning mulighed for at anvende - eller lade eleverne anvende - opgaverne på højst forskellig måde.

Den svageste elev har rigeligt at gøre med blot at forstå opgavens grundlæggende hensigt: Hvor stor er venstre side? Hvor stor er højre side? Hvilke af siderne viser det største tal? Selv om der benyttes lommeregner, skal eleven træffe en række valg med hensyn til, hvordan der skal trykkes for at få udført de rigtige operationer. Måske kommer der først nu for disse elever en begyndende erkendelse af regningsarternes hierarki ud af det.

En middelev kan - måske efter opfordring af læreren - først prøve, hvor mange af opgaverne, han eller hun kan gennemskue uden at benytte lommeregneren. Alle opgaver kan gennemskues ud fra et algebraisk overblik.

Til de dygtige og allerdygtigste elever kan læreren have forventning om, at eleven sproglig eller på symbolform skal begrunde sit svar i den enkelte opgave.

Når det lykkes at få en række elevdialoger om reglerne, er undervisningens faglige niveau løftet, og der sker i udtalt grad en læring elever imellem. Læreren rolle bliver af en ændret karakter: Hvordan fanger jeg den enkelte elevs tankegang? Hvordan formulerer jeg et spørgsmål, der udvikler elevens tænkning? Eleven skaber ikke ny viden, men eleven gør en eksisterende viden til sin egen viden i en personlig form.

Kunne man ikke blot fra tavlen have meddelt eleverne reglerne? Der gives ikke noget endeligt svar på dette spørgsmål. Kun en stadig opmærksomhed rette mod konsekvenserne af forskellige metoder kan give den enkelte lærer en tillid til, hvad der er holdbare metoder.

Læreren benytter med mellemrum starten på en time til at begrunde et af de arbejder, som er i gang eller til at perspektivere arbejdet. Måske kan der være anledning til at gøre nogle generelle overvejelser om sammenhænge og regler. Læreren træffer valg om en sådan indsats ud fra den seneste række af samtaler med enkeltelever eller grupper. Det handler om inspiration og motivering. Læringen foregår i dialogsituationerne og gennem det selvstændige arbejde. Disse fælles lærerindslag kan annonceres som et tilbud til de elever, der måtte ønske det. Andre kan arbejde selvstændigt videre eller for blive i gruppen.

Diagonaler

Et andet af arbejdsplanens forslag hedder *diagonaler*. Det faglige indhold er *grundlæggende geometriske begreber, tegning og ræsonnement*. Undervisningsformen er knyttet til eksperimenter.

Elevmaterialet ser således ud:



**Billedet er ikke medtaget
på grund af
ophavsret**

Fra lærerens side er der stillet krav om, at det er en gruppeopgave. Det betyder, at mindst to elever skal være sammen om opgaven. Sådan er det, fordi læreren mener, at i dette tilfælde er elevernes dialog af afgørende betydning for det faglige niveau. I arbejdet med materialet indgår en række af de sammenhænge, som i en mere klassisk problemformulering ville være præsenteret som definitioner og sætninger.

Eksperimenterne bringer eleverne i situationer, hvor de selv vil komme ud for at skulle formulere fx: Hvis diagonalerne står vinkelret på hinanden, så vil..... Det som i en lærergennemgang ville være en definition eller en sætning, vil i opgavens løb kunne blive til en erkendelse om definitioner og sætninger.

Differentieringen vil ligge på flere niveauer. Dels i den grad af sproglig præcisering og generalisering, som den enkelte vil kunne magte, dels i forskellige konkretiseringer af problemløsningen. Nogle kan på et sømbræt synliggøre, at diagonalerne står vinkelret på hinanden ved at placere to gummibånd på sømbrættet, lige lange eller ikke lige lange. Med dette udgangspunkt kan de gøre yderligere overvejelser, som de ellers ikke kunne magte. Andre kan, for at vise at to sider er lige lange, eksperimentere med at flytte linjer tegnet på gennemsigtigt papir el.lign., som bevæges i forhold til hinanden. Herved vil eleven få en mulighed for at lade tanke og handling spille sammen.

Differentieringen vil også blive synlig i elevernes indbyrdes argumentation: Måske har en elev en intuitiv forståelse for en bestemt delopgave, som han ikke kan få accepteret af de andre. Hans eneste mulighed for "at vinde" dialogen er at forbedre sin argumentation. Her vil både den

formulerende og den ikke formulerende kunne få et udbytte af dialogen. Det er ikke blot en dygtig, der trækker en svag med, men det er en dygtig, som bliver klar over, at det sproglige udtryk ikke er præcist nok til at kunne være en forståelig melding til andre.

Miljø i matematikundervisningen

Et undervisningsforløb på 9. eller 10. klassetrin

I arbejdet med læseplanens indhold vil det ofte være naturligt at sigte mod flere områder på samme tid. I det følgende er beskrevet et eksempel på, hvorledes en problemstilling fra nærmiljøet kan give anledning til brug af matematiske modeller, vurdering, argumentation og fordybelse i et emne af tværgående art. Her er valgt at lade arbejdet primært sigte mod "Kommunikation og problemløsning", som beskrevet i læseplanen side x, afsnit xx, og "Matematik i anvendelse" på side y, afsnit yy

Som oplæg til undervisningsforløbet læser eleverne nedenstående avisartikel, som dog kun bringes i uddrag her.

PLUS-DESIGN FÅR JA TIL LAVERE SKORSTEN

Folk i Bramsby ved godt, de bor i et "hul" med bakker på næsten alle sider. Det har et ingeniørfirma taget med i sine beregninger for fabrikken PLUS-DESIGN. Helt konkret kommer det til at betyde, at fabrikken kan nøjes med at bygge en skorsten på 35 meters højde i stedet for en på 62 meter til sit nye lakanlæg.

Efter denne indledning fortsættes:

Da Bramsby kommune i første omgang skulle godkende skorstenshøjden for lakanlægget, brugte man den sædvanlige autoriserede metode, som den er beskrevet i vejledning fra Miljøstyrelsen.

I stedet har ingeniørfirmaet brugt en nyere beregningsmetode, som kræver et udviklet edb-program. Metoden tager højde for meteorologiske forhold.

Efter flere ledsagende kommentarer slutter artiklen således:

Foreløbig har kommune, amt, miljøtilsyn og arbejdstilsyn sagt god for skorstenshøjden.

Derefter er det op til fabrikkens naboer, om de vil klage til Miljøstyrelsen.

Spørgsmålet til eleverne er nu:

VILLE I KLAGE?

I drøftelser af spørgsmålet indgår der mange holdninger, og argumenter af forskellig art bliver fremført.

Tilbage står imidlertid, at der er anført to begrundelser i artiklen, som man ikke kan gennemskue. Der skrives om en "sædvanlig autoriseret metode" til beskrivelse af skorstenshøjden og om "en nyere beregningsmetode".

Ved at læse i Miljøstyrelsens vejledning kan eleverne komme tættere på myndighedernes beslutningsgrundlag. Som eksempel er her anført, hvordan man beregner skorstenstillægget under hensyntagen til bebyggelser i nærheden af skorstenen. Først er der beregnet en teoretisk skorstenshøjde H_s .



**Billedet er ikke medtaget
på grund af
ophavsret**



**Billedet er ikke medtaget
på grund af
ophavsret**

Elevernes første opgave bliver at prøve at læse og forstå metoden til beregning af skorstenshøjder. Dette kræver en god faglig forståelse af det matematiske sprog.

I denne del af arbejdet bliver hele problemstillingen let koncentreret om en faglig-teknisk del. Eleverne opfordres derfor til at overveje, om der i beregningerne burde inddrages andre forhold end bygningshøjder og afstande. Herunder bliver hele grundlaget for, hvordan en sådan beregningsmetode opstilles, gjort til genstand for undervisningen.

For læreren kan det blive nødvendigt undervejs at formulere små spørgsmål og opgaver for at fastholde sigtet med undervisningen. At differentiere spørgsmålene til forskellige elevgrupper kan i en sådan fase være uhyre vanskelig, såfremt læreren selv skal fremstille alle undervisningsmaterialer. Meget må klares i samtaleform.

Resultatet af den nye beregningsmodel må læreren skaffe fra kommunen. Modellen, OML-modellen, beskriver spredningen af forureningen fra en punktkilde ved hjælp af en såkaldt Gausiske røgfanemodel. Det betyder, at man antager, at koncentrationen i en røgfaner er normalfordelt i såvel lodret som vandret retning. Alene i forståelsen af en sådan meget overordnet beskrivelse er der mange forhold at drøfte.

Men læreren vælger først at præsentere ingeniørfirmaets beregninger i sin helhed for eleverne. Et uddrag er vist herunder.



Igen må der ses nøjere på, hvad tallene betyder. Fx betyder tallet 84 inde i skemaet, at i afstanden 250 meter og i retningen 90 grader, altså øst for skorstenen, er koncentrationen af SO₂ 84 mikrogram pr. kubikmeter. Hertil skal så tilføjes, at der er tale om gennemsnitstal for en bestemt måned, og at det med 99% sandsynlighed vil være sådan.

At aflæse de største og mindste koncentrationer er til at klare, og det kan gøres uden at sætte tallene i relation til, hvor faregrænserne ligger for koncentrationer af SO₂. Endnu vanskeligere bliver det imidlertid, når det viser sig, at man ikke er enige om grænserne.

Som afslutning på forløbet vendes tilbage til spørgsmålet fra avisartiklen, og eleverne bliver bedt om at tage stilling til, om de ville klage. De kan udforme en skriftlig klage, hvor de skal begrunde deres svar ud fra de konkrete oplysninger. Men der kan også inddrages spørgsmål som: Kan Bramsby undvære fabrikkens arbejdspladser? Er det nyttige varer, Plus-Design fremstiller? osv.

Det centrale i undervisningen bliver imidlertid at anskueliggøre, på hvilket grundlag fx beslutninger af betydning for miljøet bliver truffet. Eleverne får erfaringer med at dykke ned i en problemstilling af tværgående art. I det beskrevne forløb benyttes de originale kildematerialer, og der bliver derfor stillet meget store krav til eleverne.

Det vil i et undervisningsforløb som det beskrevne være vanskeligt for både elever og lærere direkte at måle effekten af arbejdet. Ved fx at undersøge om eleverne kan løse en opgave, hvor en skorstenshøjde skal beregnes ud fra den anførte metode, vil kun en meget begrænset del af det lærte komme til anvendelse. Der må også lægges vægt på, hvordan man i argumentationen er i stand til at benytte de konkrete oplysninger, og om man kan forstå de specielle aspekter, der gælder for matematik i anvendelse. I samtaleform må det vurderes, hvad man lærte af forløbet. Senere kan behandles tilsvarende problemstillinger, måske med lokalt islæt, og måske mere selvstændigt. Her vil det så være muligt at se en anden effekt af undervisningsforløbet.
